Доклады Академии наук СССР
1970. Том 194, № 6

УДК 519.95

МАТЕМАТИКА

А. Н. МАСЛОВ

ОЦЕНКИ ЧИСЛА СОСТОЯНИЙ КОНЕЧНЫХ АВТОМАТОВ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 27 III 1970)

В настоящей работе рассматриваются операции над множествами слов, представимыми в конечных автоматах. Важной характеристикой сложности этих множеств является число состояний минимального представляющего автомата.

Клини доказал ([1], [2]), что множество слов представимо в конечном автомате тогда и только тогда, когда оно получается из $\{\Lambda\}$ и $\{\sigma_i\}$ (где Λ — пустое слово, а σ_i — буквы входного алфавита Σ) применением операций объединения ($\cup$) произведения ($\cdot$) и итерации ($*$).

Далее $S_i x = S_k$ обозначает, что при поступлении на вход слова x автомат, находящийся в состоянии S_i, переходит в состояния S_k; индекс 0 соответствует начальному состоянию, если не оговорено противное; $[x^\partial$ обозначает длину слова x; $T(A)$ обозначает множество слов, представимых в автомате A. В дальнейшем под представимостью событий мы везде будем подразумевать представимость в конечном автомате.

Известно, что если $T(A)$ и $T(B)$ представимы в автоматах A и B с m и n состояниями соответственно ($m \geqslant 1, n \geqslant 1$), то

1) $T(A) \cup T(B)$ представимо в автомате с $m \cdot n$ состояниями,

2) $T(A) \cdot T(B)$ представимо в автомате с $(m-1) \cdot 2^n + 2^{n-1}$ состояниями ($n \geqslant 3$),

3) $T(A)^*$ представимо в автомате $\frac{3}{4} \cdot 2^m - 1$ состояниями ($m \geqslant 2$).

Нами построены примеры автоматов над алфавитом $\Sigma = \{0, 1\}$, на которых эти оценки достигаются.

1. Объединение: A имеет состояния $\{S_0, \ldots, S_{m-1}\}$ и переходы $S_{m-1}1 = S_0$, $S_i1 = S_{i+1}$ при $i \neq m-1$, $S_i0 = S_i$, S_{m-1} — заключительное состояние; B имеет состояния $\{P_0, \ldots, P_{n-1}\}$ и переходы $P_i1 = P_i$, $P_{n-1}0 = P_0$, $P_i0 = P_{i+1}$ при $i \neq n-1$, P_{n-1} — заключительное состояние.

2. Произведение: B имеет состояния $\{P_0, \ldots, P_{n-1}\}$ и переходы $P_{n-1}1 = P_{n-2}$, $P_{n-2}1 = P_{n-1}$, $P_i1 = P_i$ при $i < n-2$, $P_{n-1}0 = P_{n-1}$, $P_i0 = P_{i+1}$ при $i \neq n-1$, P_{n-1} — заключительное состояние; автомат A такой же, как для объединения.

3. Итерация: A имеет состояния $\{S_0, \ldots, S_{m-1}\}$ и переходы $S_{m-1}1 = S_0$, $S_i1 = S_{i+1}$ при $i \neq m-1$, $S_00 = S_0$, $S_i0 = S_{i-1}$ при $i > 0$, S_{m-1} — заключительное состояние.

По A и B строим соответствующие автоматы, как в ([2], [4]), и находим необходимое число достижимых и различных состояний, что и доказывает минимальность ([3]).

Общая постановка задач такого рода: имеются события $T(A_i)$ ($1 \leqslant i \leqslant k$), представимые в автоматах A_i с n_i состояниями соответственно, и k — местная операция f над событиями, сохраняющая представимость в конечных автоматах. Каким может быть максимальное число состояний минимального автомата, представляющего $f(T(A_1), \ldots, T(A_k))$, при данных n_i?

Рассмотренные выше задачи принадлежат этому классу. Ранее был получен результат ([2], [6]), что обращения слов из множества, представимого

в автомате с m состояниями, представимо в автомате с 2^m состояниями и эта оценка достижима над алфавитом $\Sigma = \{a, b, c\}$.

Из результатов ([8]) следует, что для множества T (представимого в автомате A с n состояниями) $\{xz \mid \exists y (xy \cdot z \in T \& [x^\partial = [y^\partial = [z^\partial)\}$ может быть непредставимо. Мы докажем, что множества $\frac{p}{q} T = \left\{x \mid \exists y \left(x \cdot y \in T \& \frac{[x^\partial}{[y^\partial} = \frac{p}{q}\right)\right]$ и $\sqrt{T} = \{x \mid xx \in T\}$ всегда представимы. Нас будут интересовать оценки сложности этих множеств.

4. Для представления $\frac{p}{q} T$ построим сначала недетерминированный автомат A_1, состояниями которого будут состояния A, а матрица переходов для всех входных букв строится так: $a_{ij} = 1 \leftrightarrow \exists x([x^\partial = p \& S_j x = S_i)$. Множество начальных состояний P_0 состоит из заключительных состояний A. Из ([5]) известно, что при детерминизации получается автомат A_2, имеющий не более $2^{c\sqrt{n \ln n}}$ достижимых состояний. Искомый автомат имеет состояния $(S_i | l | P_j)$, где S_i — состояние A, P_j — состояние A_2, $0 \leqslant l < q$ — целое число. Переходы определяются формулой: $(S_i | l | P_j)\sigma = (S_i\sigma | l + 1 (\mathrm{mod}\, q) | P_j \sigma^{1-\mathrm{sign}\, l})$ $(S_0 | 0 | P_0)$ — начальное состояние. Состояние является заключительным, если $l = 0$ и $S_i \in P_j$. Число состояний этого автомата $N(p, q, n) \leqslant qn 2^{c\sqrt{n \cdot \ln n}}$. Нижнюю оценку для $\log_2 N(p, q, n)$ можно получить, используя пример в работе ([5]), но она будет отличаться мультипликативной константой.

Далее нам понадобятся оценки числа классов конгруэнтности представимого события ([2]).

5. Каждому слову Z соответствует отображение состояний Z: $S_i \to S_i Z$. Очевидно, что если словам x и y соответствуют одинаковые отображения, то они конгруэнтны, т. е. классов конгруэнтности не более n^n. Рассмотрим автомат из ([7]). Это автомат B^n над алфавитом $\Sigma = \{a, b, c\}$ с состояниями $\{Q_0, \ldots, Q_{n-1}\}$ и переходами $Q_{n-1}a = Q_0$, $Q_i a = Q_{i+1}$ при $i \neq n-1$, $Q_0 b = Q_1$, $Q_1 b = Q_0$, $Q_i b = Q_i$ при $i > 1$, $Q_0 c = Q_0$, $Q_1 c = Q_0$, $Q_i c = Q_i$ при $i > 1$; Q_0 — заключительное. B^n имеет ровно n^n классов конгруэнтности.

6. Над алфавитом $\Sigma = \{0, 1\}$ не может быть автомата с n состояниями и n^n классами конгруэнтности. Точное значение максимума числа классов конгруэнтности в этом случае неизвестно, однако можно построить автомат $B_1{}^n$, имеющий их не меньше, чем $(n-1)^{n-1}$. Состояния его $\{P_0, \ldots, P_{n-1}\}$, а переходы $P_{n-1}1 = P_1$, $P_01 = P_2$, $P_i1 = P_{i+1}$, при $i \neq 0$, $n-1$, $P_10 = P_0$, $P_00 = P_2$, $P_20 = P_1$, $P_i0 = P_i$ при $i > 2$; P_1 — начальное и заключительное состояние одновременно.

Заметим, что состояния $P_1, \ldots, P_{n-1}$ словами $a' = 1$, $b' = 001^{n-1}$ и $c' = 01^{n-1}$ отображаются так же, как состояния автомата B^{n-1} словами a, b и c. Следовательно, в множестве $(a' \cup b' \cup c')^*$ имеется $(n-1)^{n-1}$ неконгруэнтных слов.

7. Множество $\sqrt{T}$ представимо в автомате, состояниями которого являются отображения или упорядоченные наборы длины n состояний A, переходы задаются формулой

$$(S_{i_1}, \ldots, S_{i_n})\sigma = (S_{i_1}\sigma, \ldots, S_{i_n}\sigma),$$

$(S_0, S_1, \ldots, S_{n-1})$ — начальное состояние. Состояние является заключительным, если набор имеет координату $S_{i_{i_1}}$ заключительным состоянием A. Нижние оценки n^n и $(n-1)^{n-1}$ дают автоматы B^n и $B_1{}^n$.

8. В ([4]) показано, что перестановки букв в словах из представимого множества могут образовывать непредставимое множество. Если допускать только циклические перестановки, т. е.

$$T' = \{x \mid x = \sigma_{i_1} \ldots \sigma_{i_k} \& \exists l (\sigma_{i_l} \ldots \sigma_{i_k} \sigma_{i_1} \ldots \sigma_{i_{l-1}} \in T\}$$

(где T представимо в автомате A с n состояниями), то можно доказать, что и T' представимо в автомате B с $(n2^n - 2^{n-1})^n$ состояниями. Действительно, пусть B_i имеет те же состояния и переходы, что и A, S_i — его начальное состояние, заключительные состояния те же, что в автомате A. C_i имеет те же состояния и переходы, что и A, S_0 — его начальное, а S_i — единственное заключительное состояние. $T' = \bigcup_{i=0}^{n-1} (T(B_i)\cdot T(C_i))$ и, следовательно (см. 1) и 2)), представимо в автомате с $(n\cdot 2^n - 2^{n-1})^n$ состояниями. Ниже указан пример, дающий нижнюю оценку $((n-2)\cdot 2^{n-2})^{n-2}$ при $n > 3$. При этом, правда, входной алфавит растет вместе с ростом n. $\Sigma = \{a_0, \ldots, a_{n-2}, b_0, \ldots, b_{n-2}\}$. Состояния автомата $\{S_0, \ldots, S_{n-1}\}$, переходы $S_i a_i = S_{n-1}$, $S_{n-1} a_i = S_i$, $S_j a_i = S_j$ при $i \neq j$, $S_0 b_i = S_i$, $S_j b_i = S_j$ при $i \neq j$; S_{n-1} — заключительное состояние.

Автор выражает благодарность А. А. Мучнику за руководство.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
18 III 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. К. Клини, Сборн. Автоматы, М., 1956. [2] М. О. Рабин, Д. Скотт, Кибернетический сборник, в. 4, 58 (1962). [3] Э. Ф. Мур, Сборн. Автоматы, М., 1956. [4] В. М. Глушков, УМН, 16, в. 5 (101), 3 (1961). [5] Ю. И. Любич, Сибирский математический журнал, 5, № 2, 337 (1964). [6] Б. Г. Миркин, Кибернетика, № 1, 7 (1966). [7] A. Paz, Bull. Res. Council Israel, 10F, № 3, 93 (1962). [8] R. E. Stearns, J. Hartmanis, Information and Control, 6, № 1, 55 (1963).

Доклады Академии наук СССР
1970. Том 194, № 6

УДК 519.1

МАТЕМАТИКА

В. А. ПЕРЕПЕЛИЦА

О ДВУХ ЗАДАЧАХ ИЗ ТЕОРИИ ГРАФОВ

(Представлено академиком Л. В. Канторовичем 24 III 1970)

I. Задача нахождения минимального гамильтонова контура со взвешенными дугами. Контур называется гамильтоновым, если он проходит через все вершины графа, притом только по одному разу ([1]). Пусть в ориентированном графе $G(U)$ с n вершинами и множеством дуг U каждой дуге $u_{ij} \in U$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, приписан вес ρ_{ij}, где ρ_{ij} — натуральные числа из отрезка $[1, r]$. Для фиксированных n и r множество всех таких графов $G(U)$ без петель обозначим через $\mathfrak{A}_{n,r}$. Требуется на $G(U)$ выделить гамильтонов контур K такой, чтобы его вес $\sum_{u_{ij}\in K} \rho_{ij}$ был минимальным.

Если n невелико, то указанный минимальный гамильтонов контур K можно находить с помощью алгоритмов решения задачи коммивояжера ([2, 3]) *. В ([3]) алгоритм использует память $\sim n2^n$ ячеек и затрачивает операций $\sim n^2 2^n$, в ([2]) эти величины имеют порядок соответственно n и 4^n. В настоящей работе предлагается достаточно простой алгоритм $\mathscr{A}_\varphi$, который при выполнении определенных ограничений на r «почти всегда» позволяет выделить на $G(U)$ минимальный гамильтонов контур. Устанавливается также, что «почти все» ориентированные (неориентированные) графы содержат гамильтоновы контуры (циклы).

Опишем алгоритм $\mathscr{A}_\varphi$; через φ обозначим произвольную, растущую функцию от n, $\frac{\partial}{\partial n}\varphi > 0$, $\lim_{n\to\infty}\varphi = \infty$. Полагаем, что в $G(U)$ вершины перенумерованы числами $i = 1, 2, \ldots, n$; $V^+(V^-)$ обозначает множество четных (нечетных) вершин в $G(U)$; $V_s^\Delta = V^\Delta \setminus V(L_{s-1})$, $\Delta \in \{+; -\}$, где $V(L_{s-1})$ — множество вершин, принадлежащих пути $L_{s-1} = [i_1, i_2, \ldots, i_s]$ длины $s-1$; $L_0 = i_1$. Алгоритм $\mathscr{A}_\varphi$ состоит из $n-1$ шагов, перенумерованных числами $s = 1, 2, \ldots, n-1$, и разбивается на два этапа: 1 и 2.

Этап 1 состоит из 2μ шагов, где $\mu = \left[\frac{n}{2}\left(1 - \frac{1}{\varphi}\right)\right]$. На первом шаге $\mathscr{A}_\varphi$ фиксирует вершину $i_1 = 1$ и ищет первую по порядку вершину $i_2 \in V^-$, $i_2 \neq i_1$, для которой в $G(U)$ содержится такая дуга $u_{i_1 i_2}$, что $\rho_{i_1 i_2} = \min_{i\in V_1^-} \rho_{i_1 i}$; путь $L_1 = u_{i_1 i_2}$ длины 1 считается построенным. Пусть на шаге $s-1$ выделен путь L_{s-1} длины $s-1$, который начинается с вершины $i_1 = 1$ и заканчивается вершиной i_s. Если $s \leqslant \mu - 1$ $(\mu \leqslant s \leqslant 2\mu)$, то на шаге s выбирается первая по порядку дуга $u_{i_s i_{s+1}}$ такая, что $i_{s+1} \in V_s^-$ и $\rho_{i_s i_{s+1}} = \min_{i\in V_s^-} \rho_{i_s i}$ $\left(i_{s+1} \in V_s^+ \text{ и } \rho_{i_s i_{s+1}} = \min_{i\in V_s^+} \rho_{i_s i}\right)$. После этого $u_{i_s i_{s+1}}$ присоединяется к L_{s-1}: путь L_s длины s построен, следует переход к $(s+1)$-му шагу. Если ни для одной из указанных вершин i_{s+1} в $G(U)$ не существует никакой дуги $u_{i_s i_{s+1}}$, то $\mathscr{A}_\varphi$ прекращает работу на s-м шаге. Результатом этапа 1 является путь $L_{2\mu}$, который начинается с вершины i_1 и заканчивается вершиной $i_{2\mu+1}$.

* Сформулированную задачу можно решать известным методом «ветвей и границ» ([4]), для которого, однако, нет оценок.