Рассмотрим отображение φ: $\widehat{H}_Z \to \widehat{H}$ — индуцирование в смысле Фробениуса (или в терминологии [3] — индуцирование в смысле Макки). Лемма 3.18 немедленно следует из двух свойств этого отображения:

а) φ непрерывно,

б) если $p \in \widehat{H}_Z$ существенно нетривиально на S_Z, то $\varphi(p)$ существенно нетривиально на S.

Свойство а) легко вытекает из леммы 3.19 и результатов работы [10] (см. также [2, 3]).

Свойство б) сразу следует из определения φ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Pinsker M. S. On the Complexity of a Concentrator. 7th International Teletraffic Congress. Stockholm, 1973.
2. Каждан Д. А. О связи дуального пространства группы со строением ее замкнутых подгрупп. Функциональный анализ и его приложения, 1967, 1, 1, 71—74.
3. Delaroche C. et Kirillov A. Sur les relations entre l'espace dual d'un groupe et la structure de ses sous-groupes fermes, Sem. Bourbaki, N 343, Juin 1968.
4. Гельфанд И. М., Граев М. Н., Виленкин Н. Я. Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений. Обобщенные функции, 5, М., Физматгиз, 1962.
5. Ганнинг Р. К. Лекции о модулярных формах. Математика (сб. перев.), 1964, 8, 6, 3—68.
6. Борель А., Хариш-Чандра. Арифметические подгруппы алгебраических групп. Математика (сб. перев.), 1964, 8, 2, 19—71.
7. Понтрягин Л. С. Непрерывные группы. М., Гостехиздат, 1954.
8. Семинар «Софус Ли». Теория групп Ли, топология групп Ли. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
9. Dixmier J. Les C^*-algebras et leurs representations. Gauthier — Villars, Paris, 1964.
10. Fell M. G. Weak Containment and Induced Representation of Groups. Canadien J. Math., 1962, 14, 2, 237—262.

Поступила в редакцию
2 июня 1972 г.

ПРОБЛЕМЫ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ

Том IX 1973 Вып. 4

УДК 621.391.194:518.5:4

О ЦИКЛИЧЕСКОЙ ПЕРЕСТАНОВКЕ ЯЗЫКОВ

А. Н. Маслов

Выясняется замкнутость контекстно-свободных языков и языков, задаваемых E-грамматиками, относительно ряда отображений, задаваемых продукциями.

В данной работе доказывается, что класс контекстно-свободных языков [1] и класс языков, порождаемых E-грамматиками [2, 3], замкнуты относительно циклической перестановки.

Ранее было доказано, что автоматные языки замкнуты относительно циклической перестановки [4, 5] и дан метод построения автомата, представляющего язык $L' = \{\gamma \mid \gamma = \alpha\beta$ и $\beta\alpha \in L\}$ по автомату, представляющему язык L. Ниже приводятся соответствующие построения для МП-автоматов. Доказана незамкнутость контекстно-свободных языков (в отличие от автоматных языков) относительно преобразования, задаваемого продукцией $xx \to x$. Указан способ построения E-грамматики, порождающей язык L' по E-грамматике, порождающей язык L. Предварительно для E-грамматик доказывается возможность устранения правил с пустой правой частью.

Всюду через $|x|$ обозначается длина слова x, а через λ — пустое слово. Эквивалентность приводимого определения МП-автомата и контекстно-свободных грамматик доказана в [1]. Определение E-грамматик дано в [2, 3].

1. Язык является контекстно-свободным, если и только если он распознается [1] автоматом с магазинной памятью (МП-автоматом).

МП-автоматом называется шестерка $M = (S, \Sigma, Z, \delta, z_0, s_0)$, где $S = (s_0, s_1, \ldots, s_n)$ — множество состояний, $\Sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_d)$ — входной алфавит, $Z = (z_0, z_1, \ldots, z_m)$ — алфавит вспомогательных символов, s_0 — начальное состояние, z_0 — начальный вспомогательный символ, δ — таблица элементарных шагов. Автомат имеет неограниченную справа вспомогательную ленту (называемую магазинной), на которой записываются символы из Z.

Находясь в состоянии s_j, читая входной символ $\sigma_i \in \Sigma$ или пустое слово λ, и в качестве самого правого символа на магазинной ленте имея z_h, ПМ-автомат (недетерминированным образом) делает элементарный шаг (из таблицы δ): одновременно стирает только что прочитанные символы σ_i (или λ) и z_h, переходит в новое состояние s_r и записывает на магазинную ленту некоторое слово $u \in Z^*$ (возможно, пустое), начиная с ячейки, в которой был записан символ z_h. Таким образом, элементарный шаг определяется пятеркой $(\alpha, s_j, z_h) \to (s_r, u)$, где $\alpha = \sigma_i$ или $\alpha = \lambda$.

Имеется только конечное число различных элементарных шагов, записанных в таблицу δ. Если ни один из элементарных шагов неприменим, то автомат останавливается. Обозначим через $Q(M) = \{u \mid u \in Z^*$ и u записывается на магазинную ленту на одном из элементарных шагов из $\delta\}$.

Слово $\gamma \in \Sigma^*$ распознается МП-автоматом M, если из начального состояния s_0, с входным словом γ и символом z_0 на магазинной ленте МП-автомат при некотором способе работы стирает все слово γ (последовательно, слева направо) и все символы на магазинной ленте. Множество таких слов γ образует язык, распознаваемый МП-автоматом.

Теорема 1. *Класс контекстно-свободных языков замкнут относительно циклической перестановки* *.

Доказательство. Пусть МП-автомат $M=(S, \Sigma, Z, \delta, s_0, z_0)$ распознает некоторый контекстно-свободный язык L. Построим МП-автомат M_1, распознающий язык $L'=\{\gamma \mid \gamma=\alpha\beta$ и $\beta\alpha\in L\}$. Не уменьшая общности можно считать, что автомат M не имеет элементарных шагов, при которых входным символом является λ [1].

Зафиксируем некоторый способ распознавания автоматом M слова $\beta\alpha\in L$. Пусть при этом способе работы после элементарного шага, на котором стирается последний символ слова β, автомат M находится в состоянии s_i и на его магазинной ленте записано слово x **. При некотором способе работы автомат M_1 моделирует зафиксированный способ работы автомата M следующим образом.

Прежде всего автомат M_1 записывает на магазинную ленту слово $z_0''z_0'$ (z_0' и z_0'' новые вспомогательные символы). Далее автомат M_1 моделирует работу автомата M, начиная с некоторого состояния s_j, на слове α. Автомат M_1 «помнит» это состояние s_j при всей дальнейшей работе. При некотором способе работы автомат M_1 начинает моделирование из состояния s_i. Если автомат читает символ $z_k\in Z$ на магазинной ленте, то он совершает непосредственное моделирование.

Непосредственное моделирование прерывается (в частности, на первом шаге моделирования), если автомат M_1 читает символ z_0' на магазинной ленте. Последний случай соответствует чтению автоматом M некоторого символа z_r, записанного на магазинную ленту при работе на слове β. В этом случае автомат M_1 заменяет символ z_0' на некоторое слово $z_k z_0' z_k$, $z_k\in Z$. При некотором способе работы автомат M_1 запишет слово $z_r z_0' z_r$. Затем продолжается непосредственное моделирование.

При одном из способов работы (моделируя зафиксированный способ работы автомата M) автомат M_1, стерев слово α, будет иметь на магазинной ленте слово $z_0''\bar{x}z_0'$, где $\bar{x}$ — зеркальное отражение слова x (слово x определено выше).

Далее автомат M_1 моделирует работу автомата M на слове β, начиная с состояния s_0. Автомат M_1 может прервать моделирование некоторого элементарного шага автомата M. В этом случае он стирает соответствующие входной и вспомогательный символы и «запоминает» новое состояние автомата M. Но вместо того чтобы записать на магазинной ленте соответствующее слово u, автомат M_1 «запоминает» слово u и какое-нибудь его начало v. Затем автомат M_1 стирает $|v^0+1$ символов на магазинной ленте и проверяет, что последовательно справа налево стирается слово $\bar{v}z_0'$, где $\bar{v}$ — слово, зеркально-симметричное со словом v. Если автомат M_1 стирает другое слово, то он останавливается. Пусть $u=vt$ (где t, возможно, пустое). Тогда вместо последнего стертого символа автомат M_1 записывает слово $z_0't$ на магазинной ленте.

Стерев слово β, автомат M_1 «помнит» состояние s_i, с которого он начал моделирование на слове α, и состояние s_j, в которое перешел автомат M при способе работы, который моделировался на слове β. Если $s_i=s_j$ и на магазинной ленте записано слово $z_0''z_0'$ (автомат M_1 легко может проверить, какое слово записано на магазинной ленте и стереть его), то входное слово считается распознанным автоматом M_1.

* Теорема 1, объявленная в [6], независимо доказана в работе [7] (см. реферат. журн. Математика. 1972, 10В679).

** $x\neq\lambda$, если $\alpha\neq\lambda$ и $\beta\neq\lambda$.

Если автомат M_1 прерывает моделирование работы автомата M на слове β на каждом элементарном шаге, на котором на магазинную ленту записывается слово u, некоторое начало v которого не стирается при зафиксированном способе работы автомата M на слове β (использование слов u и v при прерывании моделирования указано выше), то условие представимости в автомате M_1 будет выполнено. Формально, $M_1=(S', \Sigma, Z', \delta', z_0', s_0')$, где $S'=\{s_0'\}\cup\{(s_i, s_j, l) \mid s_i\in S, s_j\in S, l=0, 1, 2\}\cup\{(s_i, s_j, u, z_0'v, v_1) \mid s_i\in S, s_j\in S, u\in Q(M)$, v — начало u, v_1 — начало $z_0'v\}$, $Z'=Z\cup\{z_0', z_0''\}$.

Элементарные шаги таблицы δ' разобьем на пять типов. 1) $(\lambda, s_0', z_0')\to((s_i, s_i, 0), z_0''z_0')$ и $(\lambda, s_0', z_0')\to((s_0, s_i, 2), z_0''z_0'z_0)$ для каждого $s_i\in S$; $(\sigma_m, (s_i, s_i, l), z_r)\to((s_k, s_j, l), u)$ для $l=0, 1, 2$, для каждого $s_i\in S$ и каждого элементарного шага $(\sigma_m, s_i, z_r)\to(s_k, u)$ автомата M; $(\lambda, (s_i, s_j, 0), z_0')\to((s_i, s_j, 0), z_r z_0' z_r)$ для каждого $z_r\in Z$, $s_i\in S$ и $s_j\in S$; 2) $(\lambda, (s_i, s_j, 0), z_0')\to((s_0, s_j, 1), z_0'z_0)$ для каждого $s_i\in S$ и $s_j\in S$; 3) $(\sigma_m, (s_i, s_j, l), z_r)\to((s_k, s_j, u, z_0'v, \lambda), \lambda)$ для $l=1, 2$, для каждого $s_j\in S$, каждого элементарного шага $(\sigma_m, s_i, z_r)\to(s_k, u)$ автомата M и каждого начала v слова u $(v\neq\lambda)$; 4) $(\lambda, (s_i, s_j, u, z_0'v, \lambda), z_0')\to((s_i, s_j, u, z_0'v, z_0'), \lambda)$ для каждого состояния вида $(s_i, s_j, u, z_0'v, \lambda)$ автомата M_1; $(\lambda, (s_i, s_j, u, z_0'v, z_0'v_1), z_r)\to((s_i, s_j, u, z_0'v, z_0'v_1 z_r), \lambda)$ для каждого состояния вида $(s_i, s_j, u, z_0'v, z'v_1)$ автомата M_1 и $z_r\in Z$, таких, что $v_1 z_r$ — начало слова v; $(s_i, s_j, u, z_0'v, x_0'v), z)\to((s_i, s_j, 2), zz_0't)$ для каждого состояния вида $(s_i, s_j, u, z_0'v, z_0'v)$ автомата M_1, $z\in Z\cup\{z_0''\}$ и $u=vt$; 5) $(\lambda, (s_i, s_i, 2), z_0')\to((s_i, s_i, 2), \lambda)$ и $(\lambda, (s_i, s_i, 2), z_0'')\to((s_i, s_i, 2), \lambda)$ для каждого $s_i\in S$.

В состояниях вида $(s_i, s_j, 0)$ автомат M_1 моделирует работу автомата M на слове α, в состояниях вида $(s_i, s_j, 1)$ и $(s_i, s_j, 2)$ моделирует * работу автомата M на слове β, в состояниях $(s_i, s_j, u, z_0'v, v_1)$ проверяет, совпадает ли предполагаемая последовательность вспомогательных символов, записываемых и не стираемых при работе автомата M на слове β, с истинной последовательностью.

Легко видеть, что каждому распознаванию автоматом M_1 слова $\alpha\beta$ (стерев α, автомат M_1 совершает элементарный шаг типа 2) соответствует некоторое распознавание автоматом M слова $\beta\alpha$. Теорема доказана.

МП-автомат M_1 является недетерминированным, даже если автомат M был детерминированным. Класс детерминированных [1] кс-языков не замкнут относительно циклической перестановки. Действительно, пусть $L=\{\alpha c\bar{\alpha} \mid \alpha\in\{0, 1\}^*, c\notin\{0, 1\}$ и $\bar{\alpha}$ — зеркальное отражение слова $\alpha\}$. Пусть язык L' есть циклическая перестановка языка L. Тогда $L'\cap\{\alpha c \mid \alpha\in\{0, 1\}^*\}$ есть, по предложению, детерминированный язык, но это неверно (см. [8]). Пример языка L указан Э. Д. Стоцким.

Замечание. В работе [4] определен класс продукций, сохраняющих регулярность языка **. Одна из таких продукций, циклическая перестановка $(xy\to yx)$, сохраняет бесконтекстность языка. Но класс продукций, сохраняющих бесконтекстность, существенно уже класса продукций, сохраняющих регулярность. Например, продукция $xx\to x$, сохраняющая регулярность [4], не сохраняет бесконтекстность. Действительно, язык $L=\{a^n ba^n ba^m ba^l ba^k ba^k b \mid m, n, l, k\geqslant 0\}$ является контекстно-свободным, а язык $(xx\to x)L=\{a^n ba^n ba^n b \mid n\geqslant 0\}$ — не является.

2. Грамматика наличия (или E-грамматика) Γ — это упорядоченная четверка $\Gamma=(V, W, S, R)$, где V — терминальный алфавит, W — вспомогательный алфавит, S — начальный символ $(S\in W)$ и R — список правил вывода, имеющих вид: r: $A_r\to\omega_r \mid E(X_1)\& \ldots \& E(X_k)$, где r есть номер правила,

* Различение состояний $(s_i, s_j, 1)$ и $(s_i, s_j, 2)$ необходимо, чтобы исключить распознавание слов $\alpha\beta$, $\alpha\in L$ и $\beta\in L$, т. е. случай $x=\lambda$, но $\alpha\neq\lambda$ и $\beta\neq\lambda$.

** Продукции, не сохраняющие регулярность, не сохраняют также бесконтекстность. Доказательство аналогично доказательству теоремы 4 в [4].

$A_r \to \omega_r$ — бесконтекстная подстановка. Формула $E(X)$ понимается так: «правило r можно применять только к слову, содержащему вспомогательную букву X». Грамматика Γ порождает язык $L(\Gamma)$, состоящий из всех слов $\alpha \in V^*$, которые выводимы из символа S правилами из R. Формула $E(X_1) \& \ldots \& E(X_k)$ называется условием применимости правила r. Для грамматики с условиями применимости вида $\bigvee_{i=r}^{n_r} (E(X_1^i) \& \ldots \& E(X_{k_i}^i))$ можно построить E-грамматику, порождающую тот же язык. Для этого каждое правило заменим на n_r правил с той же подстановкой и условием применимости $E(X_1^i) \& \ldots \& E(X_{k_i}^i)$.

Будем обозначать условие применимости некоторого правила r через $У_r$.

Для всякой кс-грамматики можно построить приведенную грамматику, порождающую тот же язык и не содержащую правил вида $A \to \lambda$, где $A \neq S$. Для грамматик с определенными ограничениями на вывод приведение не всегда возможно [9]. Однако для ограничений, накладываемых E-условиями, приведение возможно.

Лемма 1. *Если в E-грамматике $\Gamma = (V, W, S, R)$ существует вывод f: $\omega_1 A \omega_2 A \ldots \omega_k A \omega_{k+1} \Rightarrow y$, такой, что образ каждого вспомогательного символа A, не входящего ни в одно из слов ω_i, есть пустое слово и $k > n$, n — число различных символов, являющихся образами символов A, не входящих ни в одно из слов ω_i, в промежуточных словах вывода f, то в грамматике Γ существует вывод f': $\omega_1 A \omega_2 A \ldots \omega_n A \omega_{n+1} \ldots \omega_k \omega_{k+1} \Rightarrow y$.*

Доказательство. Будем называть выделенными символы A, не входящие ни в одно из слов ω_i, и их образы в промежуточных словах вывода f. Занумеруем символы, встречающиеся среди выделенных. Обозначим через P_j, $1 \leqslant j \leqslant n$, шаг вывода f, на котором впервые получается выделенный символ с индексом j, пусть этот символ получается из символа A, стоящего правее слова ω_{i_j}. Может оказаться, что $i_j = i_{j'}$, но $j \neq j'$. Обозначим через Q_j шаг вывода f, на котором в последний раз к выделенному символу применяется правило, содержащее в левой части символ с индексом j.

В выводе f' все правила вывода f, применяемые к невыделенным символам, сохраняются. В выводе f' к символу A, стоящему правее слова ω_j, применяются те же правила (параллельно, если $\exists_j \exists_{j'}$ ($i_j = i_{j'}$ и $j \neq j'$)), которые применялись в выводе f к символу A, стоящему правее слова ω_{i_j}, вплоть до шага P_j. С этого момента прекращаем применение правил к полученному выделенному символу с индексом j и ко всем символам, полученным к этому моменту из символа A, стоящего правее слова ω_j. После применения всех шагов в выводе f', предшествовавших шагу Q_j в выводе f, уничтожаем параллельно все выделенные символы с индексом j таким же образом, как это делалось в выводе f.

В выводе f' E-условия применимости правил не будут нарушены, так как для всех j выделенные символы с индексом j присутствуют в промежуточных словах вывода f' с того момента, как символ с индексом j появился впервые в промежуточном слове вывода f, до того момента как он присутствовал в последний раз.

Лемма 2. *Для каждой E-грамматики Γ можно построить E-грамматику, порождающую тот же язык и не содержащую правил $A \to \lambda$, если A не является начальным символом.*

Доказательство. Пусть $\Gamma = (V, W, S, R)$ и W содержит n символов. Добавим к вспомогательному алфавиту пары (A, N), где $A \in V \cup W$ и N — последовательность символов из W, содержащая не более n одинаковых символов. К старым правилам добавим правила: $A \to (A, \lambda)$ и $(A, \lambda) \to A$ — безусловные правила; $(A, N) \to (A_1, N_1) \ldots (A_k, N_k) \mid$ «если применимо правило $A \to \omega_1' A_1 \omega_1'' \ldots \omega_k' A_k \omega_k''$ из R, $\omega_i' \omega_i'' \in W^*$, $Q_1 = N \omega_1' \omega_1''$ и для $i > 1$ $Q_i = \omega_i' \omega_i''$, N_i получается из последовательности Q_i, если вычеркнуть каждый символ, левее которого стоит n таких же»; $(A, N) \to (A, N') \mid$ «если применимо правило $B \to \omega$ из R, $\omega \in W^*$, $N = N_1 B N_2$ и N' получается из последовательности $N_1 \omega N_2$, если вычеркнуть каждый символ, левее которого стоит n таких же». Условие $E(X)$ всюду заменяется условием: «входит символ X, или входит символ (X, N), или входит символ $(A, N_1 X N_2)$»; $S \to \lambda$, если λ принадлежит порождаемому языку.

Если в выводе f грамматики Γ встречается промежуточное слово $\omega_1 A \omega_2 A \ldots \omega_k A \omega_{k+1}$, $k > n$ и образ каждого символа A, не входящего ни в одно из слов ω_i, есть λ, то по лемме 1 его можно преобразовать в эквивалентный вывод, при котором каждый выделенный символ A, стоящий правее слова ω_{n+1}, преобразуется параллельно с некоторым другим символом A, стоящим левее слова ω_{n+1}.

Применив такое преобразование всюду, где возможно, получим специальный вывод, в котором каждое промежуточное слово имеет не более n одинаковых символов, преобразуемых независимо, образ которых есть λ.

По каждому специальному выводу построим вывод в новой грамматике: все символы, образ которых есть λ, приставим в качестве последовательностей вторых координат к символам, образ которых непуст. Это можно сделать, так как в каждом промежуточном слове специального вывода имеется не более n^2 независимо преобразуемых символов, образ которых есть λ. Устранение символов, преобразуемых параллельно с другими, образ которых есть λ, не влияет на применимость правил и результат вывода.

Указанное преобразование также и не расширяет множество выводимых слов, так как относительно каждого символа X, вошедшего во вторую координату символа $(A, N_1 X N_2)$, полученного в промежуточном слове вывода, вывод, приводящий к слову, не содержащему символов вида (B, N), «проверяет» равенство пустому слову образа символа X в соответствующем выводе в старой грамматике. Лемма доказана.

Теорема 2. *Циклическая перестановка языка, порождаемого E-грамматикой, также порождается E-грамматикой.*

Доказательство. Пусть язык L порождается E-грамматикой $\Gamma = (V, W, S, R)$, число правил в которой равно n. Не уменьшая общности, будем предполагать, что символ S не входит в правые части правил из R, нет правил вида $S \to A$ $(A \in W)$ и правило вида $A_r \to \lambda$ возможно, если только $A_r = S$. Обозначим $l = \max |\omega_r|^\circ$ и $W' = W \cup \{(A, t)\} \cup \{(A, t, M, F)\}$, где $A \in V \cup W$; $t = 0, 1$; $F = 0, 1, \ldots, n$; $M \in (V \cup W)^*$ и $|M|^\circ \leqslant l$. Для условия $У = \&_i E(X_i)$ обозначим

$$\overline{У} = \underset{i}{\&} \left(E(X_i) \vee \left(\bigvee_{t=0}^{1} E((X_i, t)) \right) \vee \left(\bigvee_{t=0}^{1} E((X_i, t, \lambda, 0)) \right) \right).$$

Построим E-грамматику Γ', порождающую язык $L' = \{\gamma \mid \gamma = \alpha\beta$ и $\beta\alpha \in L\}$. Грамматика $\Gamma' = (V, W', S, R')$, где правила R' разбиты на 5 групп.

1) правила из R, условие $У$ заменяется на $\overline{У}$;

2) $S \to (X_i, 0, \lambda, 0) X_{i+1} \ldots X_k X_1 \ldots X_{i-2} (X_{i-1}, 0)$ для каждого правила $S \to X_1 \ldots X_k$ из R и циклической перестановки слова $X_1 \ldots X_k$;

3а) $(A, t, \lambda, 0) \to (A, t \oplus 1, \omega_1 C, r) \mid \overline{У}$,

3б) $(B, t) \to B\omega_1 (C, t \oplus 1) \mid \bigvee_A E((A, t \oplus 1, \omega_1 C, r))$,

3в) $(A, t, \omega_1 C, r) \to (D, t, \lambda, 0)\, \omega_2 \mid \bigvee_B E((B, t))$

для каждого правила r: $A \to \omega_1 C D \omega_2 | У$ из R; здесь $\oplus$ означает сложение по модулю 2;

4а) $(A, t, \lambda, 0) \to A$,

4б) $(B, t) \to B \mid \bigvee_C E((C, t, \lambda, 0))$

для каждого A и B из $V \cup W$;

5а) $(A, t, \lambda, 0) \to (B, t, \lambda, 0)\, \omega_1 | \bar{У}$

для каждого правила $A \to B\omega_1 | У$ из R;

5б) $(A, t) \to \omega_2 (B, t) | \bar{У}$

для каждого правила $A \to \omega_2 B | У$ из R.

Пусть $S \to \beta_1\alpha_1 \to \beta_2\alpha_2 \to \ldots \to \beta_k\alpha_k = \gamma \in L$ вывод слова γ в грамматике Γ и слово β_i состоит из всех тех символов, образ которых при выводе принадлежит β_k. Если $\alpha_1 = \lambda$, тогда и $\alpha_k = \lambda$. В этом случае слово $\alpha_k\beta_k$ выводится из S применением только правил 1). Пусть $\alpha_1 \neq \lambda$. Докажем, что существует вывод $S \to \alpha_1'\beta_1' \Rightarrow \alpha_2'\beta_2' \Rightarrow \ldots \alpha_k'\beta_k' \Rightarrow \alpha_k\beta_k$ в грамматике Γ', такой, что α_i' получается заменой в α_i первой буквы A на $(A, t, \lambda, 0)$, β_i' заменой в β_i последней * буквы B на (B, t) при некотором t. Слово $\alpha_1'\beta_1'$ получается применением соответствующего правила 2).

Далее по индукции. Пусть слово $\alpha_i'\beta_i'$ получено. Если к слову $\beta_i\alpha_i$ применялось правило к последней букве слова β_i, то применим соответствующее правило 5б). Если применялось правило к первой букве слова α_i, то: если образ этой буквы принадлежит слову α_k, то применяем соответствующее правило 5а), если не принадлежит, то применяем соответствующее правило 3а), где слово $\omega_1 C$ состоит из букв, образ которых принадлежит слову β_k, далее применяем 3б) и 3в). В остальных случаях применяем соответствующее правило 1).

Таким образом, выводимость слова $\alpha_k'\beta_k'$ доказана. Применение правил 4а) и 4б) позволяет вывести из слова $\alpha_k'\beta_k'$ слово $\alpha_k\beta_k$. Следовательно, все слова из L' выводимы в грамматике Γ'.

Доказательство того, что терминальные слова, выводимые в грамматике Γ', принадлежат языку L', состоит из трех легко проверяемых утверждений.

I. Для всякого вывода $S \Rightarrow \omega$, $\omega \in V^*$, в грамматике Γ, начинающегося правилом 2), существует эквивалентный специальный вывод, в котором после каждого правила 3а) применяются правила 3б) и 3в), соответствующие той же подстановке. При этом правило 3а) не может применяться после применения правила 4а) или 4б).

II. Специальный вывод, после применения правила 1), или 5а), или 5б), или после применения правил 3а), 3б) и 3в) приводит к слову $\alpha_k'\beta_k'$, $\beta_k\alpha_k$ выводимо в грамматике Γ, значение штриха как и выше.

III. Терминальные слова, выводимые из $\alpha_k'\beta_k'$ (применением правил 4а), 4б), 5а), 5б) и 1)), принадлежат L'. Вывод, начинающийся применением правила 1), может содержать только правила 1), а следовательно, так можно вывести только слова из $L \subset L'$. Теорема доказана.

Аналогично можно доказать, что язык $\{x \mid x = uv$ и $\bar{v}u \in L$, где $\bar{v}$ — зеркальное отражение слова $v\}$ порождается E-грамматикой, если язык L порождается E-грамматикой. Относительно последней операции бесконтекстные языки уже незамкнуты.

* Если $\beta_i = \lambda$, то в слове α_i' заменяется последняя буква B на (B, t).

Автор признателен Э. Д. Стоцкому и М. В. Ломковской за полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гинзбург С. Математическая теория контекстно-свободных языков. М., «Мир», 1970.
2. Стоцкий Э. Д. Управление выводом в формальных грамматиках. Проблемы передачи информации, 1971, 7, 3, 87—102.
3. Ломковская М. В. Об условных и других коммутативных грамматиках. Сб. «Научно-техническая информация», сер. 2, 1972, 2, 28—31.
4. Маслов А. Н. Продукции и конечные автоматы. Сб. «Информационные вопросы семиотики, лингвистики и автоматического перевода», 3. М., ВИНИТИ, 1972.
5. Маслов А. Н. Оценки числа состояний конечных автоматов. Докл. АН СССР, 1970, 194, 6, 1266—1268.
6. Маслов А. Н. Отображения языков, задаваемые продукциями. II Всес. конф. по математической логике (тезисы кр. сообщ.). М., 1972, 31.
7. Oshiba T. Closure Property of the Family of Context-Free Languages under the Cyclic Shift Operation. Trans. Inst. Electron. and Commun. Engrs. Jap., 1972, D55, 4, 233—237.
8. Диковский А. Я. Замечание о детерминированных линейных языках. Сб. «Проблемы кибернетики», 23. М., «Наука», 1970, 281—286.
9. Salomaa A. On Some Families of Formal Languages Obtained by Regulared Derivations. Suomalainen Tiedeakatemian Toimituksia, ser. A1. 1970, 478, 1—18.

Поступила в редакцию
30 мая 1972 г.