

Nezávislosť

Roman Frič, Košice

MÚ SAV, seminar

O čom to bude?

Poznámky o stochastickej nezávislosti.

1. Nezávislosť experimentu E_2 na experimente E_1 chápeme tak, že výsledky experimentu E_1 nemajú vplyv na výsledky experimentu E_2 .
2. Ak interpretujeme pravdepodobnosť udalosti pomocou jej frekvencie (relatívnej početnosti), tak vlastne predpokladáme sériu rovnakých experimentov, pričom výsledky predchádzajúcich neovplyvňujú výsledky nasledujúceho.
3. A. N. Kolmogorov axiomatizoval teóriu pravdepodobnosti, vlastne riešil 6. Hilbertov problem o vytvorení matematickej teórie fyziky, pričom ide o oblasť teórie miery, ktorá je venovaná špeciálnym úlohám a v nich má dôležitú úlohu nezávislosť.
4. Interpretácia pravdepodobnosti udalosti pomocou jej frekvencie umožnila formálne definovať nezávislosť takto: udalosti A a B sú nezávislé ak $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. Ako tomu rozumieť?

Urobíme n nazávislých opakovaní experimentu a aproximujeme pravdepodobnosť $P(A)$ udalosti A pomocou jej frekvencie n_A/n , kde $0 \leq n_A \leq n$ je počet opakovaní keď nastala udalosť A . Táto interpretácia $P(A)$ viedla Kolmogorova k axiomam pravdepodobnostnej miery (normovanosť, aditivita), definícii podmienenej pravdepodobnosti a nezávislosti (pre $0 < n_B$):

$$n_{A \cap B}/n_B = (n_{A \cap B})/n / (n_B/n) \quad \dots \quad P(A | B) = P(A \cap B)/P(B)$$

a ďalej (pre $0 < P(B)$)

$$P(A | B) = P(A) \implies P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B),$$

čo viedlo Kolmogorova ku formálnej definícii (stochastickej) nezávislosti.

Ako na to išiel Kolmogorov

Kolmogorov začal s konečným priestorom $(\Omega, \mathbf{A}, P)$ a pod experimentom rozumie rozklad Ω , pričom udalosťou je nejaké zjednotenie prvkov rozkladu.

Hovoríme, že **experimenty** $E_1, E_2, \dots, E_n$ sú **vzájomne nezávislé** ak platí

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1).P(A_2)...P(A_n),$$

pre každú n -ticu udalostí, pričom A_i je udalosť v E_i .

Hovoríme, že **udalosti** A a B sú **nezávislé**, ak sú experimenty $\{A, A^c\}$ a $\{B, B^c\}$ nezávislé.

Dá sa dokázať, že udalosti A a B sú nezávislé práve, ak

$$P(A \cap B) = P(A).P(B)$$

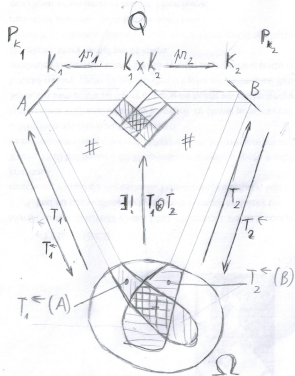
Tiviálne, takto definovaná nezávislosť je **symetrická**. Dá sa symetria odstrániť?

Nezávislosť má kategoriálne pozadie ...

Kategoriálny súčin dvoch objektov O_1 a O_2 je (ak existuje) **najlepší** objekt $O_1 \times O_2$ spolu s dvomi projekciami $pr_1 : O_1 \times O_2 \longrightarrow O_1$ a $pr_2 : O_1 \times O_2 \longrightarrow O_2$, pričom “cez projekciu pr_i **vidíme presne** pôvodný objekt O_i ”, $i = 1, 2$.

Ako ilustrácia dobre poslúži spôsob, ako modelujeme “spoločný” experiment dvoch vzájomne nezávislých experimentov hod kockou K_1 a hod kockou K_2 . Modelujeme ho pomocou kategoriálneho súčinu. Pritom $K_1 \times K_2$ a $P_{K_1} \times P_{K_2}$ je najlepším spoločným modelom týchto dvoch nezávislých experimentov.

Spoločný model dvoch nezávislých experimentov



$$\mu_{k_1}(i, j) = i, \quad \mu_{k_2}(i, j) = j$$

ak

$$T_1(\omega) = i, \text{ ak } (T_1 \otimes T_2)(\omega) = (i, j)$$

$$T_2(\omega) = j$$

$$Q(A \times B) = Q((A \times P_2) \cap (P_1 \times B))$$

$$= P(T_1^c(A) \cap T_2^c(B))$$

$$\text{ak } P(T_1^c(A) \cap T_2^c(B)) = P(T_1^c(A)) \cdot P(T_2^c(B)),$$

$$\text{ak } Q = P_{k_1} \times P_{k_2}, \quad Q((i, j)) = 1/36$$

$$A_1 \subset A \supset A_2$$

$$(\Omega, \mathcal{A}, P)$$

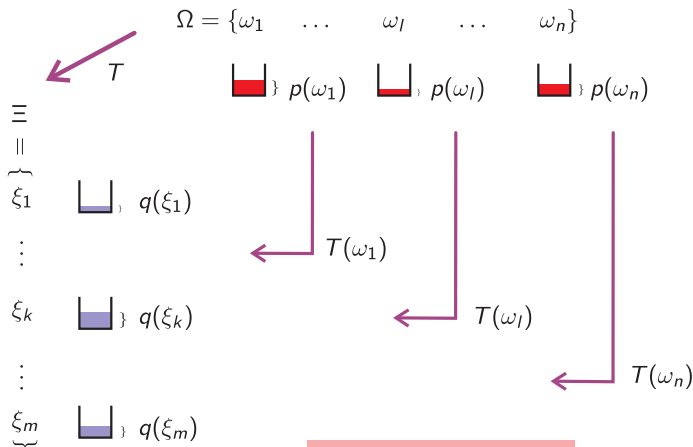
A_i zodpovedá udalostiam ločky $K_i, i=1,2$

Majme dva pravdepodobnostné priestory $(\Omega, \mathbf{A}, P)$ a $(\Xi, \mathbf{B}, Q)$.
Zobrazenie $T : \Omega \longrightarrow \Xi$ “bude užitočné” ak “prenáša” stochastické informácie z $(\Omega, \mathbf{A}, P)$ do $(\Xi, \mathbf{B}, Q)$; T spolu s $T^\leftarrow$ vytvára **stochastický kanál**. V klasickej teórii pravdepodobnosti tomu rozumieme takto:

$$Q(B) = P(T^\leftarrow(B)) = (P \circ T^\leftarrow)(B), B \in \mathbf{B}, Q = P \circ T^\leftarrow,$$

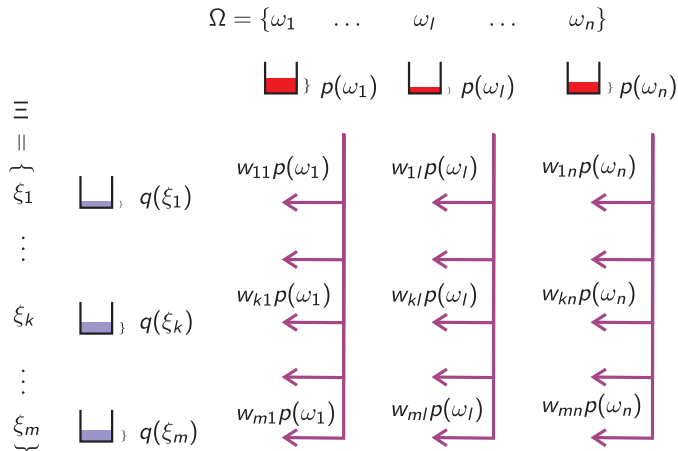
pričom $T^\leftarrow(B) = \{\omega \in \Omega; T(\omega) \in B\}$ a požadujeme, aby $T^\leftarrow : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{A}$ bolo zobrazenie, t.j., aby zobrazenie $T : \Omega \longrightarrow \Xi$ bolo merateľné. V klasickom prípade je potom experiment $(\Xi, \mathbf{B}, Q)$ vždy závislý na experimente $(\Omega, \mathbf{A}, P)$, (lebo $\mathbf{A}$ a $\{T^\leftarrow(B) \in \mathbf{A}, B \in \mathbf{B}\}$ nie sú nezávislé. **Fuzzifikácia klasickej teórie pravdepodobnosti umožňuje modelovať nezávislý stochastický kanál a asymetrickú nezávislosť!**

Klasický stochastický kanál



$$q(\xi_k) = \sum_{\omega \in T^{-1}(\xi_k)} p(\omega)$$

Kvantový stochastický kanál



$$q(\xi_k) = \sum_{l=1}^n w_{kl} p(\omega_l)$$

Všimnime si, že ak zvolíme $w_{kl} = q(\xi_k)$, tak
 $q(\xi_k) = \sum_{l=1}^n q(\xi_k)p(\omega_l) = q(\xi_k) \sum_{l=1}^n p(\omega_l)$ a
 $T(p(\omega_1), p(\omega_2), \dots, p(\omega_n)) = (q(\xi_1), q(\xi_2), \dots, q(\xi_m))$, t.j.,
 $T(P) = Q$ **nezávisle na voľbe P !**

Táto konštrukcia sa dá kanonicky popísať aj pre nediskrétny prípad. Pripomeňme si, že pri fuzzifikácii klasickej teórie pravdepodobnosti nahradíme klasický priestor $(\Omega, \mathbf{A}, p)$ jeho “fuzzifikáciou” $(\Omega, \mathcal{M}(\mathbf{A}), \int(\cdot)dP)$, pričom $\mathcal{M}(\mathbf{A})$ sú merateľné funkcie s hodnotami v intervale $[0,1]$ a $\int f dP$, $f \in \mathcal{M}(\mathbf{A})$, je pravdepodobnostný integrál f vzhľadom na mieru P .

Ak $|\Omega| = 1$, tak $\{\emptyset, \Omega\} = \mathbf{T}$ je triviálne pole množín a ak $[0,1]$ chápeme ako kanonický D -poset, tak $\mathbf{T} \equiv [0,1]$ a $P : \mathbf{A} \rightarrow [0,1]$ i $\int(\cdot)dP : \mathcal{M}(\mathbf{A}) \rightarrow \mathcal{M}(\mathbf{T})$ sú sekvenčne spojité D -homomorfizmy. To umožňuje kategoriálny prístup ku “kvantovej/fuzzy” pravdepodobnosti.

Nech $T : \Omega \longrightarrow \Xi$ je merateľné zobrazenie. Potom $T^{\leftarrow} : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{A}$ je sekvenčne spojitý booleovský homomorfizmus, ktorý definuje **zovšeobecnené merateľné zobrazenie**

$$D_T : \mathcal{P}(\mathbf{A}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbf{B}),$$

pričom $D_T(P) = P \circ T^{\leftarrow}$, $P \in \mathcal{P}(\mathbf{A})$ a platí
 $D_T \upharpoonright \Omega = T$, $\omega \equiv \delta_\omega$.

Kvantový stochastický kanál

Každý sekvenčne spojitý D -homomorfizmus $h : \mathcal{M}(\mathbf{B}) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{A})$ (**pozorovateľná**) definuje zovšeobecnené merateľné zobrazenie

$$T_h : \mathcal{P}(\mathbf{A}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbf{B})$$

(tiež **štatistické zobrazenie**, **fuzzy náhodná premenná**) takto:

pre $P \in \mathcal{P}(\mathbf{A})$ a $B \in \mathbf{B}$, $B \equiv \chi_B \longmapsto h(\chi_B) \in \mathbf{A}$ a

$\int h(\chi_B) dP = Q(B)$ definujú mieru $Q \in \mathcal{P}(\mathbf{B})$, a teda priradenie $P \longmapsto Q$.

Platí

$$(\forall B \in \mathbf{B})[h(B) = h(\chi_B) \in \mathbf{A}] \Leftrightarrow (\forall \omega \in \Omega)[T_h(\delta_\omega) \equiv T_h(\omega) \in \Xi]$$

a v tom prípade hovoríme, že h a T_h sú **konzervatívne**.

Asymetrická kvantová/fuzzy nezávislosť

Nech $(\Omega, \mathcal{M}(\mathbf{A}), \int(\cdot)dP)$ a $(\Xi, \mathcal{M}(\mathbf{B}), \int(\cdot)dQ)$ sú (zovšeobecnené) pravdepodobnostné priestory a nech $T : \mathcal{P}(\mathbf{A}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbf{B})$ je štatistické zobrazenie (zovšeobecnené merateľné zobrazenie) také, že $T(p) = Q$ pre všetky $p \in \mathcal{P}(\mathbf{A})$. Príslušnú pozorovateľnú $h : \mathcal{M}(\mathbf{B}) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{A})$, pre ktorú $T = T_h$, stačí definovať na $B \in \mathcal{M}(\mathbf{B})$ (pri dôkaze sa využíva prechod od miery ku integrálu) takto: pre $\chi_B \equiv B \in \mathbf{B}$, $h(\chi_B) = Q(B)_\Omega \in \mathbf{A}$, kde $Q(B)_\Omega$ je konštantná funkcia $(Q(B)_\Omega)(\omega) = Q(B)$, $\omega \in \Omega$. Potom $T(= T_h)$ vyjadruje to, že stav $\int(\cdot)dQ$ (zovšeobecnená pravdepodobnostná miera) na $\mathcal{M}(\mathbf{B})$ **nezáleží na voľbe stavu** $\int(\cdot)dP$ na $\mathcal{M}(\mathbf{A})$.

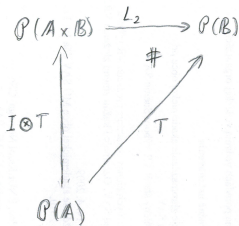
Asymetrický stochastický súčin

Prvým naším cieľom je vytvoriť **asymetrický stochastický súčin priestorov** $(\Omega, \mathcal{M}(\mathbf{A}), \int(\cdot)dP)$ a $(\Xi, \mathcal{M}(\mathbf{B}), \int(\cdot)dQ)$ **ako model spoločného experimentu, v ktorom platí asymetrická nezávislosť**.

Konštrukcia je založená na faktorizácii štatistického zobrazenia $T(= T_h)$, pričom len projekcia zo súčinu do $(\Omega, \mathcal{M}(\mathbf{A}), \int(\cdot)dP)$ je “klasická” a “vstup $(\Omega, \mathcal{M}(\mathbf{A}), \int(\cdot)dP)$ do súčinu je kvantový”. Duálna konštrukcia je “lifting $h : \mathcal{M}(\mathbf{B}) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{A})$ through $\mathcal{M}(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$ ”.

Druhým naším cieľom je **spojiť dva asymetrické súčiny tak, aby vznikol symetrický súčin a symetrická nezávislosť**. Ako špeciálny prípad dostaneme klasickú (symetrickú) nezávislosť.

Spoločný model dvoch experimentov, asymetrická nezávislosť



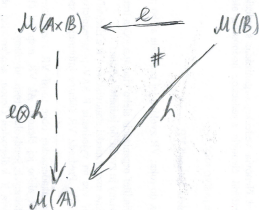
$$T = T_L, T(\mu) = Q, \mu \in P(A)$$

$$\mu \in P(A), (I \otimes T)(\mu) = \mu \times Q$$

$$\pi \in P(A \times B), (L_2(\pi))(B) = \pi(\Omega \times B), B \in \mathcal{B}$$

štandardná projekcia miery na súčine

$$T = L_2 \circ (I \otimes T), T(\mu) = L_2(\mu \times Q) = Q$$



$$h(\chi_B) = Q(B)_\Omega, (Q(B)_\Omega)(\omega) = Q(B), \omega \in \Omega$$

$$\mu \in M(B), (e(\mu))(\omega, \xi) = \mu(\xi), \omega \in \Omega, \xi \in \Xi$$

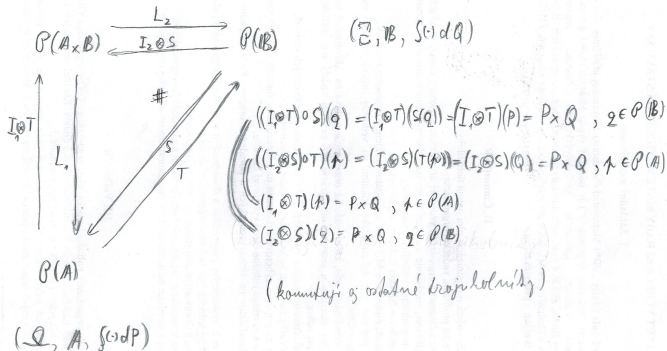
štandardné vnorenie (konštantné predĺženie) $M(B)$ do $M(A \times B)$

$$A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}, (e \otimes h)(\chi_{A \times B}) = \chi_A \cdot h(\chi_B)$$

$$h = (e \otimes h) \circ e$$

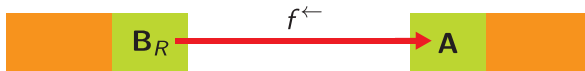
Hľadáme spoločný model dvoch experimentov, ktorý by vyjadroval ich asymetrickú nezávislosť. Hľadáme teda vhodné zobrazenie $U : \mathcal{P}(\mathbf{A}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$, pričom chceme faktorizovať $T = U \circ L_2$ tak, že $L_2 : \mathcal{P}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbf{B})$ reprezentuje kanonickú projekciu “pozeráme na $\mathcal{P}(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$ a vidíme $\mathcal{P}(\mathbf{B})$ ”. Faktor $U = I \otimes T$ je určený jednoznačne nasledujúcou úvahou. Pre každú voľbu $p \in \mathcal{P}(\mathbf{A})$ chceme, aby kanonická projekcia L_2 zobrazovala $U(p)$ na Q a kanonická projekcia $L_1 : \mathcal{P}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbf{A})$ vracala $U(p)$ do p . Špeciálne, pre každé $U(\delta_\omega)$, $\omega \in \Omega$, požadujeme $L_1(U(\delta_\omega)) = \delta_\omega$ a $L_2(U(\delta_\omega)) = Q$, t.j., $(U(\delta_\omega))(\{\omega\} \times \Xi) = 1$, $(U(\delta_\omega))(\{\omega\} \times B) = Q(B)$. To platí iba pre $U = I \otimes T$.

Konjunkcia: symetricka nezávislosť



Klasické šípky

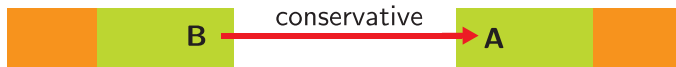
$$\mathcal{M}(\mathbf{B}_R) \xrightarrow{f^\triangleleft} \mathcal{M}(\mathbf{A})$$



$$\mathcal{P}(\mathbf{B}_R) \xleftarrow{D_f} \mathcal{P}(\mathbf{A})$$

- f ... náhodná premenná (merateľná funkcia)
- D_f ... distribučné zobrazenie generované cez f
- $f^{\leftarrow}$... sekvenčne spojitý booleovský homomorfizmus
- $f^\triangleleft$... rozšírenie f

Kvantové šípky



$$\mathcal{M}(\mathbf{B}) \xrightarrow{T^\triangleleft} \mathcal{M}(\mathbf{A})$$

$$\mathcal{IP}(\mathbf{B}) \xleftarrow{T} \mathcal{IP}(\mathbf{A})$$



- T ... štatistické zobrazenie
- $T^\triangleleft$... pozorovateľná
- $\delta(\cdot)$... bodová pravdepodobnostná miera
- $\mathcal{I}\delta(\cdot)$... integrály vzhľadom na bodovú pravdepodobnostnú mieru