LUPANOV

Problemy Kibernetiki 9 (1963)
321 - 329

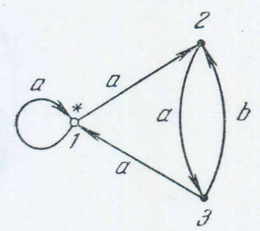
О СРАВНЕНИИ ДВУХ ТИПОВ КОНЕЧНЫХ ИСТОЧНИКОВ

О. Б. ЛУПАНОВ

(МОСКВА)

В этой заметке строятся примеры, выясняющие количественные соотношения между конечными источниками и конечными источниками некоторого специального типа [1, 2]. Рассматриваемый здесь вопрос возник в связи с задачей о соотношении сложности автоматов, представляющих и перечисляющих одно и то же событие [3, 4], и исследовался в работе Г. М. Корпелевич для автоматов Мура [5].

1. Источники. Некоторые известные факты. Пусть $A = \{a, b, c, \ldots\}$ — конечный алфавит. *Источником* (над A) будем называть конечный ориентированный граф [7], ребрам которого приписаны буквы алфавита A, в котором отмечена одна вершина (*начальная* вершина) и выделено некоторое множество вершин (*конечные* вершины). Вершины источника будем называть также *состояниями* источника. На рис. 1 приведен пример источника. Каждому ориентированному пути в источнике естественным образом поставим в соответствие слово в алфавите A, выписывая подряд буквы, приписанные ребрам этого пути (допускаются самопересекающиеся пути; допускается также путь, состоящий из одной вершины; ему соответствует пустое слово, которое мы будем обозначать символом λ).



∘ начальное состояние
* конечное состояние

Рис. 1.

Пусть $\mathfrak{M}$ — произвольное множество состояний источника. Обозначим через $T_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{M})$ множество *) (различных) слов, соответствующих всевозможным путям, начинающимся в состояниях из $\mathfrak{M}$ и оканчивающимся в конечных состояниях. Множества $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ будем называть *отличимыми*, если $T_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{M}_1) \neq T_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{M}_2)$. Множество $T_{\mathfrak{A}}(\{x_0\})$, где x_0 — начальное состояние источника $\mathfrak{A}$, будем обозначать также через $S_{\mathfrak{A}}$ **). Обозначим, далее, через $N^a_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{M})$ множество *) состояний, являющихся концами ребер, которые исходят из состояний множества $\mathfrak{M}$ и которым приписана буква a. Пусть μ — произвольное слово в алфавите A. Обозначим через $M_{\mathfrak{A}}(\mu)$ множество *) всех состояний источника $\mathfrak{A}$, являю-

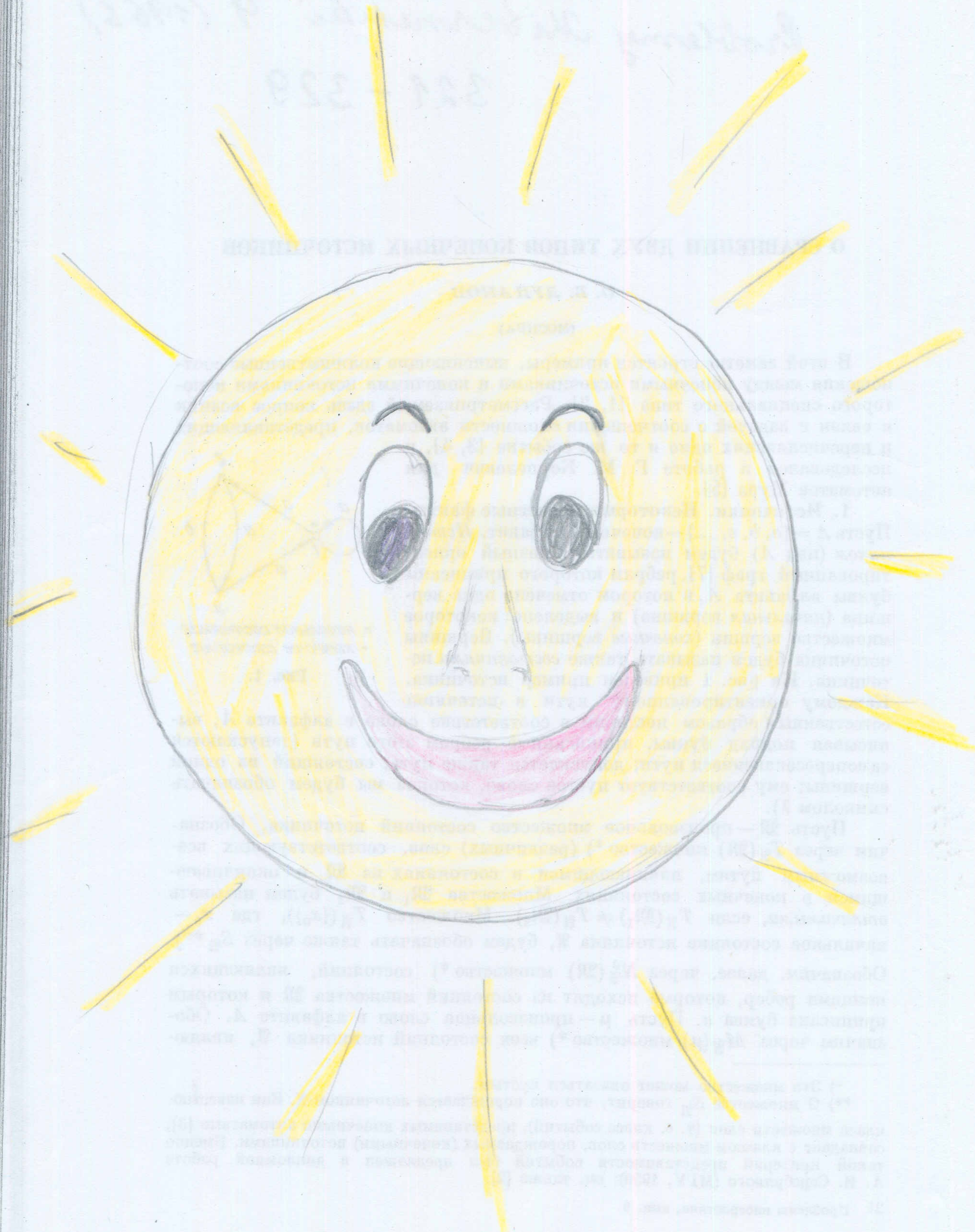
*) Это множество может оказаться пустым.

**) О множестве $S_{\mathfrak{A}}$ говорят, что оно порождается источником $\mathfrak{A}$. Как известно, класс множеств слов (т. е. класс событий), представимых конечными автоматами [3], совпадает с классом множеств слов, порождаемых (конечными) источниками. Именно такой критерий представимости событий был предложен в дипломной работе А. И. Серебряного (МГУ, 1959); см. также [2].

О СРАВНЕНИИ ДВУХ ТИПОВ КОНЕЧНЫХ ИСТОЧНИКОВ

О. Б. ЛУПАНОВ

(МОСКВА)



щихся концами путей, исходящих из начального состояния и определяющих слово μ. Множество $\mathfrak{N}$ состояний источника $\mathfrak{A}$ будем называть *достижимым*, если $\mathfrak{N} = M_{\mathfrak{A}}(\nu)$ для некоторого слова ν. Очевидно, что если множество $\mathfrak{N}$ достижимо, то множество $N^a_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{N})$ также достижимо.

Два источника $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ будем называть *эквивалентными*, если $S_{\mathfrak{A}} = S_{\mathfrak{B}}$. Источник над A будем называть *специальным*, если из каждого его состояния исходит столько ребер, сколько букв в алфавите A, причем этим ребрам приписаны различные буквы алфавита A. Очевидно, что в специальном источнике $\mathfrak{C}$ над A для любого слова μ в алфавите A и любого состояния x в $\mathfrak{C}$ имеется ровно один путь, начинающийся в x, которому соответствует μ. Как известно (см., например, [1]),

А) *для каждого источника $\mathfrak{A}$ с n состояниями существует эквивалентный ему специальный источник $\mathfrak{C}$, имеющий не более 2^n состояний* *).

Целью настоящей заметки является построение примеров источников с n состояниями, для которых эта оценка достигается **). Будут указаны две последовательности источников: $\mathfrak{A}_n$ для трехбуквенного алфавита и $\mathfrak{B}_n$ для двухбуквенного алфавита ***).

Мы будем пользоваться следующим известным фактом.

---

*) Специальный источник $\mathfrak{C}$ строится следующим образом. Каждому из 2^n подмножеств $\mathfrak{M}$ множества всех состояний источника $\mathfrak{A}$ ставится в соответствие состояние $x_{\mathfrak{M}}$ (будущего источника $\mathfrak{C}$). Для любых a и $\mathfrak{M}$ ($a \in A$) состояние $x_{\mathfrak{M}}$ соединяется ребром (направленным от $x_{\mathfrak{M}}$), которому приписана буква a, с (одним) состоянием $x_{N^a_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{M})}$. Начальным состоянием источника $\mathfrak{C}$ объявляется состояние $x_{\{x_0\}}$, где x_0 — начальное состояние источника $\mathfrak{A}$, а конечными — все состояния, соответствующие подмножествам, содержащим конечные состояния источника $\mathfrak{A}$ (на рис. 2 изображен специальный источник, построенный этим способом для источника рис. 1).

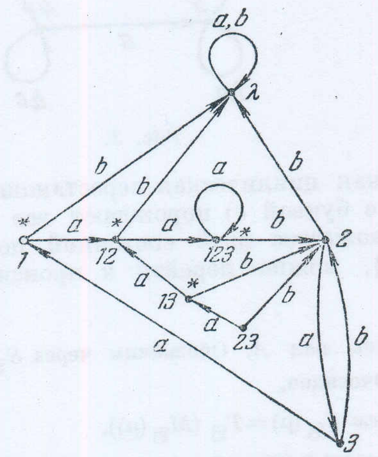


Рис. 2.

Источник $\mathfrak{C}$ обладает следующим свойством:

$$M_{\mathfrak{C}}(\mu) = x_{M_{\mathfrak{A}}(\mu)} \text{ для любого слова } \mu. \qquad (*)$$

Это свойство может быть доказано индукцией по длине слова μ. Для пустого слова λ это тривиально: $\{x_0\} = M_{\mathfrak{A}}(\lambda)$ и $M_{\mathfrak{C}}(\lambda) = x_{\{x_0\}} = x_{M_{\mathfrak{A}}(\lambda)}$. Пусть (*) доказано для всех слов длины $m-1$ и μ — произвольное слово длины m. Пусть a — последняя буква слова μ. Тогда $\mu = \nu a$, где ν — некоторое слово длины $m-1$. Имеем $M_{\mathfrak{C}}(\mu) = M_{\mathfrak{C}}(\nu a) = N^a_{\mathfrak{C}}(M_{\mathfrak{C}}(\nu)) =$ (в силу индуктивного предположения) $N^a_{\mathfrak{C}}(x_{M_{\mathfrak{A}}(\nu)}) = x_{N^a_{\mathfrak{A}}(M_{\mathfrak{A}}(\nu))} = x_{M_{\mathfrak{A}}(\nu a)} = x_{M_{\mathfrak{A}}(\mu)}$.

Эквивалентность источников $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{C}$ теперь вытекает из следующей цепочки соотношений ($X \longleftrightarrow Y$ означает, что из X следует Y и наоборот):

$\mu \in S_{\mathfrak{A}} \longleftrightarrow M_{\mathfrak{A}}(\mu)$ содержит конечную вершину $\longleftrightarrow$

$$\longleftrightarrow x_{M_{\mathfrak{A}}(\mu)} = M_{\mathfrak{C}}(\mu) \text{ (см. (*)) — конечная вершина в } \mathfrak{C} \longleftrightarrow \mu \in S_{\mathfrak{C}}.$$

**) В работе Г. М. Корпелевич показано, что при переходе от автомата Мура [5] с n состояниями, перечисляющего событие, к автомату Мура, представляющему то же самое событие, в некоторых случаях число состояний необходимо увеличить до $2^{[n/2]}$.

***) Источники $\mathfrak{A}_n$ описываются лишь потому, что для них достижение указанной оценки почти не требует доказательства.

Б) *Пусть $\mathfrak{F}$ — произвольный специальный источник, эквивалентный источнику $\mathfrak{A}$. Тогда число состояний источника $\mathfrak{F}$ не менее числа попарно отличимых достижимых множеств состояний источника $\mathfrak{A}$* *).

2. Источник $\mathfrak{A}_n$ (над алфавитом $\{a, b, c\}$), $n \geqslant 2$. Состояния занумерованы числами $1, 2, \ldots, n$. Ребра, которым приписана буква a, суть $(1, 2), (2, 3), \ldots, (n-1, n), (n, 1)$; они определяют циклическую перестановку состояний $(12 \ldots n)$. Ребра, которым приписана буква b, суть $\overrightarrow{(1, 2)}, \overrightarrow{(2, 1)}, \overrightarrow{(3, 3)}, \overrightarrow{(4, 4)}, \ldots, \overrightarrow{(n, n)}$; они определяют транспозицию состояний 1 и 2. Ребра, которым приписана буква c, суть $\overrightarrow{(2, 1)}, \overrightarrow{(2, 2)}, \overrightarrow{(3, 3)}, \ldots, \overrightarrow{(n, n)}$. Состояние 1 является начальным и единственным конечным. На рис. 3 изображен источник $\mathfrak{A}_6$ (здесь параллельные ребра совмещены).

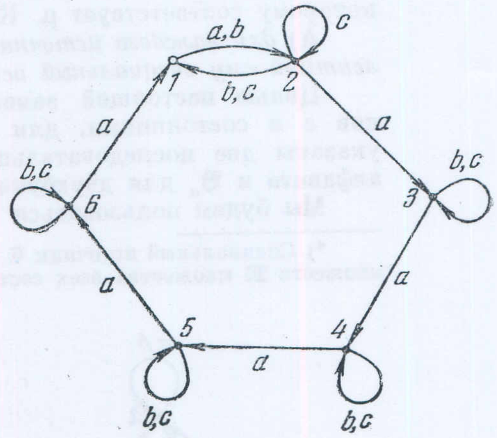


Рис. 3.

Покажем, что специальный источник с минимальным числом состояний, эквивалентный источнику $\mathfrak{A}_n$, имеет 2^n состояний. В силу А) и Б) для этого достаточно показать, что:

I. Все подмножества состояний в $\mathfrak{A}_n$ достижимы.

II. Все подмножества состояний в $\mathfrak{A}_n$ попарно отличимы.

I. Д о с т и ж и м о с т ь. 1) Так как циклическая перестановка (ребра с буквой a) и транспозиция (ребра с буквой b) порождают все перестановки, то от фиксированного подмножества из k состояний по путям, соответствующим словам над $\{a, b\}$, можно перейти к произвольному подмножеству из k состояний.

---

*) Пусть $\mathfrak{B}$ — произвольный источник над A. Обозначим через $S_{\mathfrak{B}}(\mu)$ множество всех слов ν таких, что $\mu\nu \in S_{\mathfrak{B}}$. Очевидно,

$$\text{для любого слова } \mu \text{ имеем } S_{\mathfrak{B}}(\mu) = T_{\mathfrak{B}}(M_{\mathfrak{B}}(\mu)). \qquad (**)$$

Перейдем теперь непосредственно к доказательству утверждения Б). Пусть M — множество всех достижимых и попарно отличимых подмножеств $\mathfrak{M}$ состояний источника $\mathfrak{A}$. Для каждого $\mathfrak{M}$ из M выберем по одному слову $\mu_{\mathfrak{M}}$ такому, что $M_{\mathfrak{A}}(\mu_{\mathfrak{M}}) = \mathfrak{M}$; множеству $\mathfrak{M}$ поставим в соответствие *состояние* $M_{\mathfrak{F}}(\mu_{\mathfrak{M}})$ источника $\mathfrak{F}$ (это будет состояние, так как $\mathfrak{F}$ — специальный источник). Для завершения доказательства достаточно показать, что для различных $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ из M состояния $M_{\mathfrak{F}}(\mu_{\mathfrak{M}_1})$ и $M_{\mathfrak{F}}(\mu_{\mathfrak{M}_2})$ различны. В самом деле, если $\mathfrak{M}_1 \in M$, $\mathfrak{M}_2 \in M$, $\mathfrak{M}_1 \neq \mathfrak{M}_2$, то $T_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{M}_1) \neq T_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{M}_2)$ (отличимость). Отсюда в силу эквивалентности источников $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{F}$ и из (**) имеем:

$$S_{\mathfrak{F}}(\mu_{\mathfrak{M}_1}) = S_{\mathfrak{A}}(\mu_{\mathfrak{M}_1}) = T_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{M}_1) \neq T_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{M}_2) = S_{\mathfrak{A}}(\mu_{\mathfrak{M}_2}) = S_{\mathfrak{F}}(\mu_{\mathfrak{M}_2}).$$

Но (см. (**))

$$S_{\mathfrak{F}}(\mu_{\mathfrak{M}_i}) = T_{\mathfrak{F}}(M_{\mathfrak{F}}(\mu_{\mathfrak{M}_i})), \quad i = 1, 2.$$

Поэтому

$$T_{\mathfrak{F}}(M_{\mathfrak{F}}(\mu_{\mathfrak{M}_1})) \neq T_{\mathfrak{F}}(M_{\mathfrak{F}}(\mu_{\mathfrak{M}_2}))$$

и, следовательно,

$$M_{\mathfrak{F}}(\mu_{M_1}) \neq M_{\mathfrak{F}}(\mu_{\mathfrak{M}_2}).$$

2) Подмножество $\{1\}$ тривиально достижимо.

3) Некоторое подмножество из k состояний можно получить из некоторого подмножества из $k-1$ состояний. Например, $N^c_{\mathfrak{A}_n}(\{2, 3, \ldots, k\}) = \{1, 2, 3, \ldots, k\}$.

Так можно получить все непустые подмножества. Пустое подмножество также достижимо, так как $N^c_{\mathfrak{A}_n}(\{1\})$ пусто.

II. Отличимость. Все подмножества состояний отличаются друг от друга уже множествами определяемых ими слов в алфавите $\{a\}$ длины от 1 до n: множество $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ определяет ровно k слов указанного вида, длины которых равны $n+1-i_1, n+1-i_2, \ldots, n+1-i_k$.

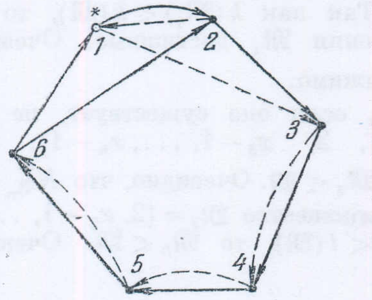


Рис. 4.

3. Источник $\mathfrak{B}_n$ (над алфавитом $\{a, b\}$), $n \geqslant 3$. Состояния занумерованы числами 1, 2, ..., n. Ребра, которым приписана буква a, суть $\overrightarrow{(1, 2)}, \overrightarrow{(2, 3)}, \ldots, \overrightarrow{(n-1, n)}, \overrightarrow{(n, 1)}, \overrightarrow{(n, 2)}$. Ребра, которым приписана буква b, суть $\overrightarrow{(2, 1)}, \overrightarrow{(1, 3)}, \overrightarrow{(3, 4)}, \overrightarrow{(4, 5)}, \ldots, \overrightarrow{(n-2, n-1)}, \overrightarrow{(n-1, n)}$. Состояние 1 является начальным и единственным конечным. Заметим, что в источнике $\mathfrak{B}_n$ из каждого состояния исходит ровно два ребра. На рис. 4 изображен источник $\mathfrak{B}_6$ (ребра, которым приписана буква a, изображены сплошными линиями; ребра, которым приписана буква b, — пунктирными; сами буквы опущены).

Покажем, что специальный источник с минимальным числом состояний, эквивалентный источнику $\mathfrak{B}_n$, имеет 2^n состояний*). Так же как и в предыдущем случае, для этого достаточно установить достижимость и отличимость подмножеств.

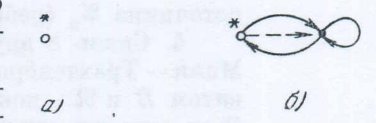


Рис. 5.

I. Достижимость. Рассмотрим следующие три числовые характеристики непустых множеств $\mathfrak{M}$ состояний источника $\mathfrak{B}_n$: $k(\mathfrak{M})$ — число элементов множества $\mathfrak{M}$; $l(\mathfrak{M})$ — разность между наибольшим и наименьшим номерами состояний из $\mathfrak{M}$; $m(\mathfrak{M})$ — наименьший из номеров состояний в $\mathfrak{M}$.

Каждому непустому множеству $\mathfrak{M}$ поставим в соответствие тройку чисел $(k(\mathfrak{M}), l(\mathfrak{M}), m(\mathfrak{M}))$. Частично упорядочим (непустые) множества $\mathfrak{M}$ в соответствии с лексикографическим упорядочением этих троек, т. е.

1) если $k(\mathfrak{M}_1) < k(\mathfrak{M}_2)$, то $\mathfrak{M}_1 < \mathfrak{M}_2$;

2) если $k(\mathfrak{M}_1) = k(\mathfrak{M}_2)$, но $l(\mathfrak{M}_1) < l(\mathfrak{M}_2)$, то $\mathfrak{M}_1 < \mathfrak{M}_2$;

3) если $k(\mathfrak{M}_1) = k(\mathfrak{M}_2)$, $l(\mathfrak{M}_1) = l(\mathfrak{M}_2)$, но $m(\mathfrak{M}_1) < m(\mathfrak{M}_2)$, то $\mathfrak{M}_1 < \mathfrak{M}_2$.

Очевидно, что это отношение транзитивно. Далее, при таком отношении порядка имеется единственный минимальный элемент: $\{1\}$ (этому множеству соответствует тройка $(1, 0, 1)$; всякое другое одноэлементное множество имеет тройку $(1, 0, m)$, $m > 1$; всякое множество из двух или более элементов имеет тройку (k, l, m), $k \geqslant 2$).

---

*) Для $n = 1, 2$ аналогичные источники (над $\{a, b\}$) изображены соответственно на рис. 5, *а* и 5, *б*.

Перейдем теперь непосредственно к доказательству достижимости. Доказательство будем проводить индукцией по введенному частичному упорядочению.

α. Множество $\{1\}$ (минимальный элемент) достижимо.

β. Пусть $\mathfrak{M}$ — произвольное (непустое) множество, содержащее элемент, отличный от 1, и пусть все множества $\mathfrak{N}$ такие, что $\mathfrak{N} < \mathfrak{M}$, достижимы. Покажем, что $\mathfrak{M}$ также достижимо. Элементы множества $\mathfrak{M}$ расположим в порядке возрастания: $\mathfrak{M} = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$, $x_1 < x_2 < \ldots < x_k$. Возможны несколько случаев.

1) $x_1 = 1$, $x_2 = 2$. Рассмотрим множество $\mathfrak{M}_1 = \{x_3 - 1, \ldots, x_k - 1, n\}$ ($x_k \leqslant n$, поэтому $x_k - 1 \leqslant n - 1$). Так как $k(\mathfrak{M}_1) < k(\mathfrak{M})$, то $\mathfrak{M}_1 < \mathfrak{M}$. В силу индуктивного предположения $\mathfrak{M}_1$ достижимо. Очевидно, что $N^a_{\mathfrak{B}_n}(\mathfrak{M}_1) = \mathfrak{M}$; поэтому и $\mathfrak{M}$ достижимо.

2) $x_1 = 1$, $x_2 = 3$ (поэтому x_3, если оно существует, не менее 4). Рассмотрим множество $\mathfrak{M}_2 = \{1, 2, x_3 - 1, \ldots, x_k - 1\}$. Так как $k(\mathfrak{M}_2) = k(\mathfrak{M})$ и $l(\mathfrak{M}_2) < l(\mathfrak{M})$, то $\mathfrak{M}_2 < \mathfrak{M}$. Очевидно, что $N^b_{\mathfrak{B}_n}(\mathfrak{M}_2) = \mathfrak{M}$.

3) $x_1 = 1$, $x_2 \geqslant 4$. Рассмотрим множество $\mathfrak{M}_3 = \{2, x_2 - 1, \ldots, x_k - 1\}$. Так как $k(\mathfrak{M}_3) = k(\mathfrak{M})$ и $l(\mathfrak{M}_3) < l(\mathfrak{M})$, то $\mathfrak{M}_3 < \mathfrak{M}$. Очевидно, что $N^b_{\mathfrak{B}_n}(\mathfrak{M}_3) = \mathfrak{M}$.

4) $x_1 \geqslant 2$. Рассмотрим множество $\mathfrak{M}_4 = \{x_1 - 1, x_2 - 1, \ldots, x_k - 1\}$. Так как $k(\mathfrak{M}_4) = k(\mathfrak{M})$, $l(\mathfrak{M}_4) = l(\mathfrak{M})$, $m(\mathfrak{M}_4) < m(\mathfrak{M})$, то $\mathfrak{M}_4 < \mathfrak{M}$. Очевидно, что $N^a_{\mathfrak{B}_n}(\mathfrak{M}_4) = \mathfrak{M}$.

Таким образом, достижимость всех непустых множеств установлена. Пустое множество также достижимо, так как $\{n\}$ достижимо и $N^b_{\mathfrak{B}_n}\{n\}$ пусто.

II. Отличимость устанавливается точно так же, как и для источника $\mathfrak{A}_n$ (ребро $\overrightarrow{(n, 2)}$ здесь никакой роли не играет).

4. Связь с другими «автоматными» понятиями. Пусть $\mathfrak{U}$ — автомат Мили — Трахтенброта [7, 8] с входным алфавитом A и выходным алфавитом B и $\mathfrak{N}$ — некоторое множество выделенных его состояний (рис. 6, *а*). Этот автомат определяет два источника: 1) источник $\mathfrak{U}'$ над A (рис. 6, *б*),

Рис. 6.

получающийся из диаграммы автомата стиранием выходных букв, приписанных ребрам, и 2) источник $\mathfrak{U}''$ над B (рис. 6, *в*), получающийся из диаграммы автомата стиранием входных букв, приписанных ребрам; очевидно, что источник $\mathfrak{U}'$ является специальным. Говорят, что автомат $\mathfrak{U}$ представляет событие $S_{\mathfrak{U}'}$ и перечисляет событие $S_{\mathfrak{U}''}$. Рассмотренные выше примеры источников ($\mathfrak{A}_n$ и $\mathfrak{B}_n$) показывают, что при переходе от автомата Мили — Трахтенброта с n состояниями, перечисляющего некоторое событие, к автомату, представляющему то же самое событие, иногда необходимо увеличение числа состояний до 2^n.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Chomsky N., Miller G. A., Finite state languages, Inf. and Control **1**, 2, 1958, 91—112 (русский перевод: Кибернетич. сб., вып. 4).

[2] Глебский Ю. В., Кодирование с помощью автоматов с конечной внутренней памятью, Сб. «Проблемы кибернетики», вып. 7, 1962, 127—149.

[3] Клини С. К., Представление событий в нервных сетях и конечных автоматах, Сб. «Автоматы», ИЛ, 1956, 15—67.

[4] Козмидиади В. А., О множествах, перечислимых и разрешимых автоматами, ДАН СССР **142**, 5, 1962, 1005—1006.

[5] Мур Э. Ф., Умозрительные эксперименты с последовательностными машинами, Сб. «Автоматы», ИЛ, 1956, 179—210.

[6] König D., Theory der endlichen und unendlichen Graphen, Leipzig, 1936.

[7] Mealy G. H., A method for synthesizing sequential circuits, Bell Syst. Techn. J. **34**, 5, 1955, 1045—1080.

[8] Трахтенброт Б. А., Об операторах, реализуемых в логических сетях, ДАН СССР **112**, 6, 1957, 1005—1007.

Поступило в редакцию 11 V 1962.

$x_1\ x_2\ \ldots\ x_k$ $\quad x_1 < x_1 \ldots < x_k$

(1.) $x_1 = 1 \quad x_2 = 2$

$\{x_3 - 1, x_4 - 1, \ldots, x_k - 1, m\} \xrightarrow{a} \{x_3, x_4, \ldots, x_k, 1, 2\}$ O.K.

$k-1$ prvkova

(2) $x_1 = 1 \quad x_2 = 3$

$\{1, 2, x_3 - 1, \ldots, x_k - 1\} \xrightarrow{b} \{1, 3, x_3, \ldots, x_k\}$

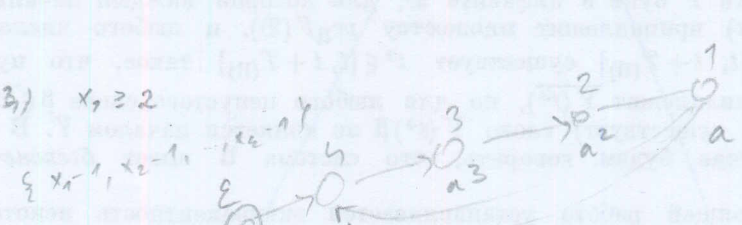
(1)

(3) $x_1 = 1 \quad x_2 \geq 4$

$\{2, x_2 - 1, \ldots, x_k - 1\}$

(3) $x_1 \geq 2$

$\{x_1 - 1, x_2 - 1, \ldots, x_k - 1\}$



УСЛОВИЯ ПОЛНОТЫ ДЛЯ НЕРАВНОМЕРНЫХ КОДОВ

Ал. А. МАРКОВ
(ГОРЬКИЙ)

Пусть $\mathfrak{A} = \{a_1, \ldots, a_m\}$ — алфавит с основанием m, $\mathfrak{U} = \{u_1, \ldots, u_m\}$ — система слов в алфавите $\mathfrak{B} = \{b_1, b_2, \ldots, b_N\}$ с основанием N. Рассматривается кодирование слов в алфавите $\mathfrak{A}$, осуществляемое путем замены каждой буквы $a_i \in \mathfrak{A}$ в каждом ее вхождении в кодируемое слово соответствующим ей словом $u_i \in \mathfrak{U}$. Всюду на протяжении этой статьи кодирование с помощью системы $\mathfrak{U}$ будет предполагаться взаимно однозначным, т. е. таким, что из соотношения $u_{i_1} \ldots u_{i_k} = u_{j_1} \ldots u_{j_l}$ следует $l = k$ и $i_s = j_s$ для всех $s = 1, 2, \ldots, k$. Если это условие выполняется, систему слов $\mathfrak{U}$ будем называть *независимой*.

Говорят, что система $\mathfrak{U}$ имеет свойство *префикса* [1], если ни для каких слов $u_i, u_j \in \mathfrak{U}$ не имеет места $u_i = u_j\beta$, где β — слово в алфавите $\mathfrak{B}$.

Систему $\mathfrak{U}$ назовем полной, если для любого слова v в алфавите $\mathfrak{B}$ система $\{\mathfrak{U} \cup v\}$ не является независимой.

Через $F(\mathfrak{B})$ будем обозначать множество всех слов в алфавите $\mathfrak{B}$; множество слов в $\mathfrak{B}$, являющихся началами кодов слов в $\mathfrak{A}$, обозначим через $pr_{\mathfrak{U}}F(\mathfrak{B})$. Если $Y \in pr_{\mathfrak{U}}F(\mathfrak{B})$, то через $\overline{Y}$ обозначим множество слов β в алфавите $\mathfrak{B}$ таких, что слово $Y\beta$ может быть представлено в виде $u_{i_1} u_{i_2} \ldots u_{i_k}$, где $l(u_{i_k}) > l(\beta)$ (через $l(\alpha)$ обозначается длина слова α). Для слова (или бесконечной последовательности букв) Y через $Y(t)$ будем обозначать начальный отрезок Y длины t.

Будем говорить, что система $\mathfrak{U}$ *имеет свойство конечной задержки*, если существует число $T_{(\mathfrak{U})}$ такое, что для любой бесконечной последовательности Y букв в алфавите $\mathfrak{B}$, для которой каждый начальный отрезок $Y(t)$ принадлежит множеству $pr_{\mathfrak{U}}F(\mathfrak{B})$, и любого числового интервала $[t, t + T_{(\mathfrak{U})}]$ существует $t^* \in [t, t + T_{(\mathfrak{U})}]$ такое, что пустое слово Λ принадлежит $\overline{Y(t^*)}$, но для любого непустого слова $\beta \in \overline{Y(t^*}$ (если такое существует) слово $Y(t^*)\beta$ не является началом Y. В противном случае будем говорить, что система $\mathfrak{U}$ имеет *бесконечную задержку*.

В настоящей работе устанавливается эквивалентность некоторых условий полноты системы $\mathfrak{U}$. Кроме того, показано, что если система $\mathfrak{U}$ не имеет свойства префикса, но имеет свойство конечной задержки, то она не полна. Из этого, в частности, следует, что если система $\mathfrak{U}$ осуществляет оптимальное двоичное кодирование, то $\mathfrak{U}$ имеет либо свойство префикса, либо бесконечную задержку.

Для случая, когда система $\mathfrak{U}$ не имеет свойства префикса, в работе [2] был предложен критерий для распознавания свойства