А Л Г Е Б Р А и Л О Г И К А
Семинар

июль - август 1962 г. Руководитель А.И. Мальцев Выпуск 4

О ГИПОТЕЗЕ В.А. УСПЕНСКОГО

Ю.Л. Ершов

В заметке указывается пример серии конечных инициальных автоматов $\{\mathfrak{A}_n\}$, ($n = 2,3,\ldots$), удовлетворяющих следующим условиям:

I) $\mathfrak{A}_n$ имеет n внутренних состояний $\{q_0^n, q_1^n, \ldots, q_{n-1}^n\}$.

2) Минимальное число состояний автомата, распознающего множество слов, порожденное автоматом $\mathfrak{A}_n$, равно 2^n.

Этот пример дает положительный ответ на гипотезу В.А. Успенского, сформулированную в [I].

I. Существует известный процесс построения автомата $\mathfrak{A}^*$ без выходов, распознающего множество слов, порождаемое автоматом $\mathfrak{A}$. Множеством его внутренних состояний служит множество всех подмножеств (включая пустое) множества внутренних состояний автомата $\mathfrak{A}$ с начальным состоянием $\{q_0\}$, где q_0-начальное состояние автомата $\mathfrak{A}$, а функция переходов Φ определяется следующим образом.

Если $\mathfrak{A}$ имеет внутренние состояния $\{q_0, q_1, \ldots, q_{n-1}\}$, то внутренние состояния $\mathfrak{A}^*$ будем записывать в следующем виде: Λ обозначает пустое подмножество (которое будем называть пустым состоянием автомата $\mathfrak{A}^*$), $q_{i_1} q_{i_2} \ldots q_{i_k}$ ($i_1 < i_2 < \ldots < i_k$) обозначает подмножество $\{q_{i_1}, q_{i_2}, \ldots, q_{i_k}\}$.

Если рассматривать операцию объединения $\{q_{i_1}, \ldots, q_{i_k}\} \cup \{q_{j_1}, \ldots, q_{j_l}\}$ как умножение, определенное на множестве состояний автомата $\mathfrak{A}^*$, то это множество становится коммутативной полугруппой $\overline{\mathfrak{A}}$, все элементы которой идемпотентны.

Будем предполагать, что выходным алфавитом автомата $\mathfrak{A}$ является алфавит $\{0, I\}$. Тогда

$$\Phi(i, \Lambda) \overset{df}{=} \Lambda \quad (i = 0, I),$$

$\Phi(i, q_j) \overset{df}{=}$ подмножеству тех внутренних состояний автомата $\mathfrak{A}$, которые находятся в столбце таблицы переходов автомата $\mathfrak{A}$, соответствующем состоянию q_j, и у которых на выход подается символ i.

$$\Phi(i, q_{j_1} q_{j_2} \ldots q_{j_l}) \overset{df}{=} \Phi(i, q_{j_1})\,\Phi(i, q_{j_2}) \ldots \Phi(i, q_{j_l}).$$

Слова алфавита $\{0,1\}$ можно рассматривать как операторы над полугруппой $\overline{\mathfrak{A}}$, действующие по правилу:

$$(i_1 i_2 \ldots i_k) q_{j_1} \ldots q_{j_l} \overset{df}{=} \Phi(i_1, \Phi(i_2, \ldots, \Phi(i_{k-1}, \Phi(i_k, q_{j_1} \ldots q_{j_l}))\ldots)),$$
$$i_s = 0, 1 \quad (s = 1, 2, \ldots, k).$$

Слова алфавита $\{0,1\}$ будем обозначать через P, а элементы из полугруппы $\overline{\mathfrak{A}}$ через Q, тогда запись PQ обозначает то состояние автомата $\mathfrak{A}^*$, в которое слово P переведет состояние Q. Легко проверяются соотношения:

$$(P_1 P_2) Q = P_1 (P_2 Q), \quad P(Q_1 Q_2) = (PQ_1)(PQ_2). \qquad (1)$$

2. Автоматы $\mathfrak{A}_n$ зададим таблицей. Входным и выходным алфавитом любого автомата $\mathfrak{A}_n$ будет алфавит $\{0,1\}$.

Схема автомата $\mathfrak{A}_n$

	q_0^n	q_1^n	...	q_i^n	...	q_{n-2}^n	q_{n-1}^n
0	$0 / q_1^n$	$0 / q_2^n$	...	$0 / q_{i+1}^n$	...	$0 / q_{n-1}^n$	$0 / q_0^n$
1	$0 / q_0^n$	$1 / q_1^n$	...	$1 / q_i^n$	...	$1 / q_{n-2}^n$	$1 / q_{n-1}^n$

Начальное состояние q_0^n.

Ради удобства будем пропускать верхние индексы. Построим автомат $\mathfrak{A}_n^*$. Его функция переходов полностью определяется (в виду (1)) следующими соотношениями (в указанных выше обозначениях):

$$\left.\begin{array}{ll} 0q_0 = q_0 q_1 & 1q_0 = \Lambda \\ 0q_i = q_{i+1} \ (i \neq 0,\ i \neq n-1) & 1q_i = q_i \quad (i \neq 0) \\ 0q_{n-1} = q_0 & \end{array}\right\} \qquad (2)$$

Для любого неотрицательного натурального k положим

$$P^k = \begin{cases} \Lambda, & \text{если } k = 0 \\ \underbrace{PP\ldots P}_{k\ \text{раз}}, & \text{если } k > 0. \end{cases}$$

Из (2) легко вывести следующие соотношения:

$$\left.\begin{array}{l} 0^k q_0 = q_0 q_1 \ldots q_k \quad \text{для } k = 0, 1, \ldots, n-1. \\ (10)^k q_i = \begin{cases} q_{i+k}, & \text{если } i + k \leq n-1 \\ \Lambda, & \text{если } i + k \geq n. \end{cases} \end{array}\right\} \qquad (3)$$

3. Л Е М М А 1. А в т о м а т $\mathfrak{A}_n^*$ я в л я е т с я с в я з н ы м.

Нужно показать, что для любого $Q \in \overline{\mathfrak{A}}_n$ найдется слово P из алфавита $\{0,1\}$, такое, что $P_{q_0} = Q$.

Если $Q = \Lambda$, то $P = 1$, это следует из (2); если $Q = q_{i_1} q_{i_2} \dots q_{i_k}$ $(i_1 < i_2 < \dots < i_k)$, то непосредственной проверкой (используя (3)) убеждаемся, что искомое

$$P = 0(10)^{i_2 - i_1 - 1} 0(10)^{i_3 - i_2 - 1} \dots 0(10)^{i_k - i_{k-1} - 1} 0(10)^{n - i_k - 1} 0^{n-1}.$$

ЛЕММА 2. Для любых двух неравных $Q_1, Q_2 \in \overline{\mathfrak{A}}_n$ найдется слово P (быть может пустое) из алфавита $\{0,1\}$, такое, что либо $PQ_1 = \Lambda, PQ_2 \neq \Lambda$, либо $PQ_1 \neq \Lambda$, $PQ_2 = \Lambda$.

Пусть

$$Q_1 = q_{i_1} q_{i_2} \dots q_{i_k} (i_1 < \dots < i_k), Q_2 = q_{j_1} \dots q_{j_l} (j_1 < \dots < j_l).$$

Если $Q_2 = q_{j_1} \dots Q_1 \dots$ или $Q_1 = q_{i_1} \dots Q_2 \dots$, то в качестве P нужно взять соответственно $(10)^{n-1} 0^{n - j_{l-k}}$ или $(10)^{n-1} 0^{n - i_{k-l}}$, тогда (используя (3)) легко проверяется, что $PQ_1 = \Lambda, PQ_2 = q_{n-1}$ или, соответственно, $PQ_1 = q_{n-1}$, $PQ_2 = \Lambda$.

Пусть s -наименьшее неотрицательное целое, такое, что $i_{k-s} \neq j_{l-s}$, и пусть для определенности $i_{k-s} > j_{l-s}$, тогда для $P = (10)^{n-1} 0^{n - i_{k-s}}$ имеем (используя опять (3)) $PQ_1 = q_{n-1}$, а $PQ_2 = \Lambda$.

Случай, когда $Q_1 = \Lambda$ или $Q_2 = \Lambda$, тривиален.

4. ТЕОРЕМА. Автомат $\mathfrak{A}_n^*$ является минимальным автоматом, распознающим множество слов, порождаемое автоматом $\mathfrak{A}_n$.

Действительно, по теореме 32 из [2], любой связный автомат, представляющий данное событие, $\mathfrak{A}$ - гомоморфно отображается на минимальный, причем указанный гомоморфизм отображает состояния, которые представляют данное событие в данном автомате, в состояния минимального автомата, которые также представляют это событие, и, аналогично, для дополнительного события. Предположим, что $\mathfrak{A}_n^*$ не минимальный, тогда указанный гомоморфизм нетривиален, и он индуцирует на полугруппе $\overline{\mathfrak{A}}_n$ нетривиальное отношение эквивалентности θ, которое, как легко видеть, сохраняется при умножении на слова из алфавита $\{0,1\}$. Так как θ нетривиально, то существуют Q_1, Q_2, такие, что $Q_1 \neq Q_2$, но

$$Q_1 \equiv Q_2 (\mathrm{mod}\, \theta). \qquad (4)$$

Ни Q_1, ни Q_2 не должны равняться Λ, потому что множеством состояний, представляющим в автомате $\mathfrak{A}_n^*$ множество всех слов, порождаемое автоматом $\mathfrak{A}_n$, являются все состояния, отличные от Λ . Но по лемме 2 существует слово P , такое, что либо $PQ_1=\Lambda$, $PQ_2\neq\Lambda$, либо $PQ_1\neq\Lambda$, $PQ_2=\Lambda$. Умножая (4) на P , получим, что Λ θ -эквивалентно некоторому $Q\neq\Lambda$, что невозможно. Доказательство закончено.

СЛЕДСТВИЕ. Для сколь угодно большого натурального N существует событие, представимое одним состоянием некоторого конечного автомата, дополнение к которому не представимо ни в каком конечном автомате состояниями в числе, меньшем N .

Используемые без определения понятия можно найти в [2].

ЗАМЕЧАНИЕ I. Не трудно проверить, что если за начальные состояния автоматов $\mathfrak{A}_n$ брать любые другие их состояния, то получается серия инициальных автоматов $\{\mathfrak{A}_n'\}$, которая удовлетворяет сформулированным выше условиям. Ничего не изменится , если в таблице переходов автоматов $\mathfrak{A}_n$ внутри столбцов переставить клетки.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Свойство автоматов $\mathfrak{A}_n$, сформулированное в замечании I, не является необходимым. Автор построил серию инициальных автоматов $\{\mathfrak{L}_n\}$,таких, что для $\mathfrak{L}_n$ выполняются условия I) и 2), но если за начальное состояние автоматов $\mathfrak{L}_n$ брать любое, отличное от указанного, то условие 2) не будет выполнено.

После написания работы автору стало известно, что О.Б. Лупанов также построил примеры (отличные от указанных здесь), дающие положительный ответ на гипотезу В.А.Успенского.

Поступила в редакцию
I2.IX.I962

Литература

I. Козмидиади В.А. О множествах, перечислимых и разрешимых автоматами. -ДАН СССР, I962, I42, 5, I005-I006.

2. Глушков В.М. Абстрактная теория автоматов.- УМН, I96I, I6, 5 (I0I), 3-62.