Galoisova konexia určená zužovaním (a rozširovaním) spojitých reálnych funkcií

Peter Eliaš

Smolenice, 17. 9. 2019

Galoisova konexia určená zužovaním spojitých reálnych funkcií

Výsledky boli získané pri riešení projektu VEGA 1/0097/16.

- 31$^{\text{st}}$ International Summer Conference on Real Functions Theory, september 2017, Ustka, Poľsko
- 32$^{\text{nd}}$ International Summer Conference on Real Functions Theory, september 2018, Stará Lesná, Slovensko

1. P. Eliaš, *A Galois connection related to restrictions of continuous real functions*, Topology and its Applications 265 (2019), 106814.

Obsah

Obsah

1. Úvod
    - označenia a definície
    - Galoisova konexia
    - zväzy $\mathcal{K}_\mathcal{G}$, $\mathcal{L}_\mathcal{G}$
2. Prvky zväzov $\mathcal{K}_\mathcal{G}$, $\mathcal{L}_\mathcal{G}$
    - najmenšie prvky zväzov $\mathcal{K}_\mathcal{G}$
    - zväz $\mathcal{K}_\mathcal{G}$ obsahujúci všetky prvky všetkých zväzov $\mathcal{K}_{\mathcal{G}'}$

Obsah

1. Úvod
    - označenia a definície
    - Galoisova konexia
    - zväzy $\mathcal{K}_{\mathcal{G}}$, $\mathcal{L}_{\mathcal{G}}$
2. Prvky zväzov $\mathcal{K}_{\mathcal{G}}$, $\mathcal{L}_{\mathcal{G}}$
    - najmenšie prvky zväzov $\mathcal{K}_{\mathcal{G}}$
    - zväz $\mathcal{K}_{\mathcal{G}}$ obsahujúci všetky prvky všetkých zväzov $\mathcal{K}_{\mathcal{G}'}$
3. Zväz $\mathcal{K}_{\mathcal{G}}$ pre systém $\mathcal{G}$ určený jednou spojitou funkciou
    - $\mathcal{G} = \{g\}$
    - $\mathcal{G} = (-\infty, g)$
    - $\mathcal{G} = (-\infty, g) \cup (g, \infty)$

Obsah

1. Úvod
    - označenia a definície
    - Galoisova konexia
    - zväzy $\mathcal{K}_{\mathcal{G}}$, $\mathcal{L}_{\mathcal{G}}$
2. Prvky zväzov $\mathcal{K}_{\mathcal{G}}$, $\mathcal{L}_{\mathcal{G}}$
    - najmenšie prvky zväzov $\mathcal{K}_{\mathcal{G}}$
    - zväz $\mathcal{K}_{\mathcal{G}}$ obsahujúci všetky prvky všetkých zväzov $\mathcal{K}_{\mathcal{G}'}$
3. Zväz $\mathcal{K}_{\mathcal{G}}$ pre systém $\mathcal{G}$ určený jednou spojitou funkciou
    - $\mathcal{G} = \{g\}$
    - $\mathcal{G} = (-\infty, g)$
    - $\mathcal{G} = (-\infty, g) \cup (g, \infty)$
4. Zväz $\mathcal{K}_{\mathcal{G}}$ pre systém $\mathcal{G}$ tvorený polynomiálnymi funkciami
    - systém všetkých konštantných funkcií
    - systém všetkých lineárnych funkcií
    - systém všetkých polynomiálnych funkcií stupňa $\leq n$

Úvod

Označenie

Nech X, Y sú topologické priestory, $Z \subseteq X$.

- $C(X, Y)$: systém všetkých spojitých funkcií z X do Y
- $CL_X(Z)$: systém všetkých podmnožín množiny Z uzavretých v X
- píšeme $CL(Z)$ namiesto $CL_{\mathbb{R}}(Z)$

Označenie

Nech X, Y sú topologické priestory, $Z \subseteq X$.

- $C(X, Y)$: systém všetkých spojitých funkcií z X do Y
- $CL_X(Z)$: systém všetkých podmnožín množiny Z uzavretých v X
- píšeme $CL(Z)$ namiesto $CL_{\mathbb{R}}(Z)$

Nech $\mathcal{F}$ je systém funkcií, E je množina. Označme $\mathcal{F} \restriction E = \{f \restriction E \colon f \in \mathcal{F}\}$.

Galoisova konexia

Nech $\mathcal{G} \subseteq C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Pre $\mathcal{E} \subseteq CL(\mathbb{R})$ a $\mathcal{F} \subseteq C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ označme:

- $E_{\mathcal{G}}(\mathcal{F}) = \{E \in CL(\mathbb{R}) \colon (\forall f \in \mathcal{F})\ f \restriction E \in \mathcal{G} \restriction E\}$
- $F_{\mathcal{G}}(\mathcal{E}) = \{f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \colon (\forall E \in \mathcal{E})\ f \restriction E \in \mathcal{G} \restriction E\}$

Galoisova konexia

Nech $\mathcal{G} \subseteq C(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Pre $\mathcal{E} \subseteq CL(\mathbb{R})$ a $\mathcal{F} \subseteq C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ označme:

- $E_{\mathcal{G}}(\mathcal{F}) = \{E \in CL(\mathbb{R})\colon (\forall f \in \mathcal{F})\ f \restriction E \in \mathcal{G} \restriction E\}$
- $F_{\mathcal{G}}(\mathcal{E}) = \{f \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})\colon (\forall E \in \mathcal{E})\ f \restriction E \in \mathcal{G} \restriction E\}$

Zobrazenia $E_{\mathcal{G}}\colon \mathcal{P}(C(\mathbb{R},\mathbb{R})) \to \mathcal{P}(CL(\mathbb{R}))$, $F_{\mathcal{G}}\colon \mathcal{P}(CL(\mathbb{R})) \to \mathcal{P}(C(\mathbb{R},\mathbb{R}))$ tvoria Galoisovu konexiu medzi $(\mathcal{P}(C(\mathbb{R},\mathbb{R})),\subseteq)$ a $(\mathcal{P}(CL(\mathbb{R},\mathbb{R})),\subseteq)$.

Galoisova konexia

Nech $\mathcal{G} \subseteq C(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Pre $\mathcal{E} \subseteq CL(\mathbb{R})$ a $\mathcal{F} \subseteq C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ označme:

- $E_{\mathcal{G}}(\mathcal{F}) = \{E \in CL(\mathbb{R})\colon (\forall f \in \mathcal{F})\ f \restriction E \in \mathcal{G} \restriction E\}$
- $F_{\mathcal{G}}(\mathcal{E}) = \{f \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})\colon (\forall E \in \mathcal{E})\ f \restriction E \in \mathcal{G} \restriction E\}$

Zobrazenia $E_{\mathcal{G}}\colon \mathcal{P}(C(\mathbb{R},\mathbb{R})) \to \mathcal{P}(CL(\mathbb{R}))$, $F_{\mathcal{G}}\colon \mathcal{P}(CL(\mathbb{R})) \to \mathcal{P}(C(\mathbb{R},\mathbb{R}))$ tvoria Galoisovu konexiu medzi $(\mathcal{P}(C(\mathbb{R},\mathbb{R})),\subseteq)$ a $(\mathcal{P}(CL(\mathbb{R},\mathbb{R})),\subseteq)$.

- $E_{\mathcal{G}}$, $F_{\mathcal{G}}$ sú klesajúce (order-reversing)

Galoisova konexia

Nech $\mathcal{G} \subseteq C(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Pre $\mathcal{E} \subseteq CL(\mathbb{R})$ a $\mathcal{F} \subseteq C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ označme:

- $E_\mathcal{G}(\mathcal{F}) = \{E \in CL(\mathbb{R})\colon (\forall f \in \mathcal{F})\ f \restriction E \in \mathcal{G} \restriction E\}$
- $F_\mathcal{G}(\mathcal{E}) = \{f \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})\colon (\forall E \in \mathcal{E})\ f \restriction E \in \mathcal{G} \restriction E\}$

Zobrazenia $E_\mathcal{G}\colon \mathcal{P}(C(\mathbb{R},\mathbb{R})) \to \mathcal{P}(CL(\mathbb{R}))$, $F_\mathcal{G}\colon \mathcal{P}(CL(\mathbb{R})) \to \mathcal{P}(C(\mathbb{R},\mathbb{R}))$ tvoria Galoisovu konexiu medzi $(\mathcal{P}(C(\mathbb{R},\mathbb{R})), \subseteq)$ a $(\mathcal{P}(CL(\mathbb{R},\mathbb{R})), \subseteq)$.

- $E_\mathcal{G}$, $F_\mathcal{G}$ sú klesajúce (order-reversing)
- $\mathcal{E} \subseteq E_\mathcal{G}(\mathcal{F})$ práve vtedy, keď $\mathcal{F} \subseteq F_\mathcal{G}(\mathcal{E})$

Galoisova konexia

Nech $\mathcal{G} \subseteq C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Pre $\mathcal{E} \subseteq CL(\mathbb{R})$ a $\mathcal{F} \subseteq C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ označme:

- $E_{\mathcal{G}}(\mathcal{F}) = \{E \in CL(\mathbb{R}) \colon (\forall f \in \mathcal{F})\ f \restriction E \in \mathcal{G} \restriction E\}$
- $F_{\mathcal{G}}(\mathcal{E}) = \{f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \colon (\forall E \in \mathcal{E})\ f \restriction E \in \mathcal{G} \restriction E\}$

Zobrazenia $E_{\mathcal{G}} \colon \mathcal{P}(C(\mathbb{R}, \mathbb{R})) \to \mathcal{P}(CL(\mathbb{R}))$, $F_{\mathcal{G}} \colon \mathcal{P}(CL(\mathbb{R})) \to \mathcal{P}(C(\mathbb{R}, \mathbb{R}))$ tvoria Galoisovu konexiu medzi $(\mathcal{P}(C(\mathbb{R}, \mathbb{R})), \subseteq)$ a $(\mathcal{P}(CL(\mathbb{R}, \mathbb{R})), \subseteq)$.

- $E_{\mathcal{G}}$, $F_{\mathcal{G}}$ sú klesajúce (order-reversing)
- $\mathcal{E} \subseteq E_{\mathcal{G}}(\mathcal{F})$ práve vtedy, keď $\mathcal{F} \subseteq F_{\mathcal{G}}(\mathcal{E})$
- kompozície $E_{\mathcal{G}} F_{\mathcal{G}} \colon \mathcal{P}(CL(\mathbb{R})) \to \mathcal{P}(CL(\mathbb{R}))$ a $F_{\mathcal{G}} E_{\mathcal{G}} \colon \mathcal{P}(C(\mathbb{R}, \mathbb{R})) \to \mathcal{P}(C(\mathbb{R}, \mathbb{R}))$ sú uzáverové operátory

Galoisova konexia

Nech $\mathcal{G} \subseteq C(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Pre $\mathcal{E} \subseteq CL(\mathbb{R})$ a $\mathcal{F} \subseteq C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ označme:

- $E_{\mathcal{G}}(\mathcal{F}) = \{E \in CL(\mathbb{R}) \colon (\forall f \in \mathcal{F})\ f \restriction E \in \mathcal{G} \restriction E\}$
- $F_{\mathcal{G}}(\mathcal{E}) = \{f \in C(\mathbb{R},\mathbb{R}) \colon (\forall E \in \mathcal{E})\ f \restriction E \in \mathcal{G} \restriction E\}$

Zobrazenia $E_{\mathcal{G}} \colon \mathcal{P}(C(\mathbb{R},\mathbb{R})) \to \mathcal{P}(CL(\mathbb{R}))$, $F_{\mathcal{G}} \colon \mathcal{P}(CL(\mathbb{R})) \to \mathcal{P}(C(\mathbb{R},\mathbb{R}))$ tvoria Galoisovu konexiu medzi $(\mathcal{P}(C(\mathbb{R},\mathbb{R})), \subseteq)$ a $(\mathcal{P}(CL(\mathbb{R},\mathbb{R})), \subseteq)$.

- $E_{\mathcal{G}}$, $F_{\mathcal{G}}$ sú klesajúce (order-reversing)
- $\mathcal{E} \subseteq E_{\mathcal{G}}(\mathcal{F})$ práve vtedy, keď $\mathcal{F} \subseteq F_{\mathcal{G}}(\mathcal{E})$
- kompozície $E_{\mathcal{G}}F_{\mathcal{G}} \colon \mathcal{P}(CL(\mathbb{R})) \to \mathcal{P}(CL(\mathbb{R}))$ a $F_{\mathcal{G}}E_{\mathcal{G}} \colon \mathcal{P}(C(\mathbb{R},\mathbb{R})) \to \mathcal{P}(C(\mathbb{R},\mathbb{R}))$ sú uzáverové operátory

Označme:

- $\mathcal{K}_{\mathcal{G}} = \{\mathcal{E} \subseteq CL(\mathbb{R}) \colon \mathcal{E} = E_{\mathcal{G}}F_{\mathcal{G}}(\mathcal{E})\} = \{E_{\mathcal{G}}(\mathcal{F}) \colon \mathcal{F} \subseteq C(\mathbb{R},\mathbb{R})\}$
- $\mathcal{L}_{\mathcal{G}} = \{\mathcal{F} \subseteq C(\mathbb{R},\mathbb{R}) \colon \mathcal{F} = F_{\mathcal{G}}E_{\mathcal{G}}(\mathcal{F})\} = \{F_{\mathcal{G}}(\mathcal{E}) \colon \mathcal{E} \subseteq CL(\mathbb{R})\}$

Galoisova konexia

Nech $\mathcal{G} \subseteq C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Pre $\mathcal{E} \subseteq CL(\mathbb{R})$ a $\mathcal{F} \subseteq C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ označme:

- $E_{\mathcal{G}}(\mathcal{F}) = \{E \in CL(\mathbb{R})\colon (\forall f \in \mathcal{F})\ f \restriction E \in \mathcal{G} \restriction E\}$
- $F_{\mathcal{G}}(\mathcal{E}) = \{f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})\colon (\forall E \in \mathcal{E})\ f \restriction E \in \mathcal{G} \restriction E\}$

Zobrazenia $E_{\mathcal{G}}\colon \mathcal{P}(C(\mathbb{R}, \mathbb{R})) \to \mathcal{P}(CL(\mathbb{R}))$, $F_{\mathcal{G}}\colon \mathcal{P}(CL(\mathbb{R})) \to \mathcal{P}(C(\mathbb{R}, \mathbb{R}))$
tvoria Galoisovu konexiu medzi $(\mathcal{P}(C(\mathbb{R}, \mathbb{R})), \subseteq)$ a $(\mathcal{P}(CL(\mathbb{R}, \mathbb{R})), \subseteq)$.

- $E_{\mathcal{G}}$, $F_{\mathcal{G}}$ sú klesajúce (order-reversing)
- $\mathcal{E} \subseteq E_{\mathcal{G}}(\mathcal{F})$ práve vtedy, keď $\mathcal{F} \subseteq F_{\mathcal{G}}(\mathcal{E})$
- kompozície $E_{\mathcal{G}}F_{\mathcal{G}}\colon \mathcal{P}(CL(\mathbb{R})) \to \mathcal{P}(CL(\mathbb{R}))$ a
  $F_{\mathcal{G}}E_{\mathcal{G}}\colon \mathcal{P}(C(\mathbb{R}, \mathbb{R})) \to \mathcal{P}(C(\mathbb{R}, \mathbb{R}))$ sú uzáverové operátory

Označme:

- $\mathcal{K}_{\mathcal{G}} = \{\mathcal{E} \subseteq CL(\mathbb{R})\colon \mathcal{E} = E_{\mathcal{G}}F_{\mathcal{G}}(\mathcal{E})\} = \{E_{\mathcal{G}}(\mathcal{F})\colon \mathcal{F} \subseteq C(\mathbb{R}, \mathbb{R}))\}$
- $\mathcal{L}_{\mathcal{G}} = \{\mathcal{F} \subseteq C(\mathbb{R}, \mathbb{R})\colon \mathcal{F} = F_{\mathcal{G}}E_{\mathcal{G}}(\mathcal{F})\} = \{F_{\mathcal{G}}(\mathcal{E})\colon \mathcal{E} \subseteq CL(\mathbb{R}))\}$

Potom $(\mathcal{K}_{\mathcal{G}}, \subseteq)$ a $(\mathcal{L}_{\mathcal{G}}, \subseteq)$ sú duálne izomorfné úplné zväzy,
v ktorých sa $\bigwedge$ zhoduje s $\bigcap$.

Prvky zväzov $\mathcal{K}_{\mathcal{G}}, \mathcal{L}_{\mathcal{G}}$

Najmenšie prvky zväzov $\mathcal{K}_{\mathcal{G}}, \mathcal{L}_{\mathcal{G}}$

Fakt

Pre všetky $\mathcal{G} \subseteq C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\bigwedge \mathcal{L}_{\mathcal{G}} = F_{\mathcal{G}}(\{\mathbb{R}\}) = \mathcal{G}$.

Najmenšie prvky zväzov $\mathcal{K}_{\mathcal{G}}, \mathcal{L}_{\mathcal{G}}$

Fakt

Pre všetky $\mathcal{G} \subseteq C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\bigwedge \mathcal{L}_{\mathcal{G}} = F_{\mathcal{G}}(\{\mathbb{R}\}) = \mathcal{G}$.

Dôsledok

Každý systém $\mathcal{F} \subseteq C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ je najmenším prvkom nejakého zväzu $\mathcal{L}_{\mathcal{G}}$.

Najmenšie prvky zväzov $\mathcal{K}_{\mathcal{G}}, \mathcal{L}_{\mathcal{G}}$

Fakt

Pre všetky $\mathcal{G} \subseteq C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\bigwedge \mathcal{L}_{\mathcal{G}} = F_{\mathcal{G}}(\{\mathbb{R}\}) = \mathcal{G}$.

Dôsledok

Každý systém $\mathcal{F} \subseteq C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ je najmenším prvkom nejakého zväzu $\mathcal{L}_{\mathcal{G}}$.

Pre ktoré $\mathcal{E} \subseteq CL(\mathbb{R})$ existuje $\mathcal{G} \subseteq C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ také, že $\bigwedge \mathcal{K}_{\mathcal{G}} = \mathcal{E}$?

Najmenšie prvky zväzov $\mathcal{K}_\mathcal{G}, \mathcal{L}_\mathcal{G}$

Fakt

Pre všetky $\mathcal{G} \subseteq C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\bigwedge \mathcal{L}_\mathcal{G} = F_\mathcal{G}(\{\mathbb{R}\}) = \mathcal{G}$.

Dôsledok

Každý systém $\mathcal{F} \subseteq C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ je najmenším prvkom nejakého zväzu $\mathcal{L}_\mathcal{G}$.

Pre ktoré $\mathcal{E} \subseteq CL(\mathbb{R})$ existuje $\mathcal{G} \subseteq C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ také, že $\bigwedge \mathcal{K}_\mathcal{G} = \mathcal{E}$?

Veta

Nech $\mathcal{E} \subseteq CL(\mathbb{R})$. Nasledujúce podmienky sú ekvivalentné.

1. *Existuje $\mathcal{G} \subseteq C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ také, že $\mathcal{E} \in \mathcal{K}_\mathcal{G}$.*
2. *Existuje $\mathcal{G} \subseteq C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ také, že $\mathcal{E} = \bigwedge \mathcal{K}_\mathcal{G}$.*
3. *$\mathcal{E}$ je dedičný, teda $CL(E) \subseteq \mathcal{E}$ pre všetky $E \in \mathcal{E}$.*

Najmenšie prvky zväzov $\mathcal{K}_\mathcal{G}, \mathcal{L}_\mathcal{G}$

Fakt

Pre všetky $\mathcal{G} \subseteq C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\bigwedge \mathcal{L}_\mathcal{G} = F_\mathcal{G}(\{\mathbb{R}\}) = \mathcal{G}$.

Dôsledok

Každý systém $\mathcal{F} \subseteq C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ je najmenším prvkom nejakého zväzu $\mathcal{L}_\mathcal{G}$.

Pre ktoré $\mathcal{E} \subseteq CL(\mathbb{R})$ existuje $\mathcal{G} \subseteq C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ také, že $\bigwedge \mathcal{K}_\mathcal{G} = \mathcal{E}$?

Veta

Nech $\mathcal{E} \subseteq CL(\mathbb{R})$. Nasledujúce podmienky sú ekvivalentné.

1. *Existuje $\mathcal{G} \subseteq C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ také, že $\mathcal{E} \in \mathcal{K}_\mathcal{G}$.*
2. *Existuje $\mathcal{G} \subseteq C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ také, že $\mathcal{E} = \bigwedge \mathcal{K}_\mathcal{G}$.*
3. *$\mathcal{E}$ je dedičný, teda $CL(E) \subseteq \mathcal{E}$ pre všetky $E \in \mathcal{E}$.*

Pre 3 $\Rightarrow$ 2 potrebujeme „oklamať“ Darbouxovu vetu o obore hodnôt spojitej funkcie.

Zväz $\mathcal{K}_{\mathcal{G}}$ obsahujúci všetky neprázdne dedičné systémy

Veta

Existuje $\mathcal{G} \subseteq C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *taký, že* $\mathcal{E} \in \mathcal{K}_{\mathcal{G}}$ *pre každý neprázdny dedičný systém* $\mathcal{E} \subseteq CL(\mathbb{R})$.

Zväz $\mathcal{K}_\mathcal{G}$ obsahujúci všetky neprázdne dedičné systémy

Veta

Existuje $\mathcal{G} \subseteq C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *taký, že* $\mathcal{E} \in \mathcal{K}_\mathcal{G}$ *pre každý neprázdny dedičný systém* $\mathcal{E} \subseteq CL(\mathbb{R})$.

Dôkaz

Nech $\{E_\alpha : \alpha < 2^{\aleph_0}\}$ je očíslovanie systému všetkých uzavretých množín. Indukciou pre $\alpha < 2^{\aleph_0}$ definujme $x_\alpha, y_\alpha \in \mathbb{R}$ a $g_{\alpha,n} \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tak, aby pre každý interval I spĺňajúci $E_\alpha \cap I \neq \emptyset$ existovalo $n \in \omega$ také, že

- $g_{\alpha,n}(x_\beta) \neq y_\beta$ pre všetky $\beta < \alpha$,
- $g_{\alpha,n}(x) = y_\alpha$ pre všetky $x \notin I$.

Nech $\mathcal{G} = \{g_{\alpha,n} : \alpha < 2^{\aleph_0},\ n \in \omega\}$. Pre každý neprázdny dedičný systém $\mathcal{E} \subseteq CL(\mathbb{R})$, nech $\mathcal{F}$ je systém obsahujúci všetky konštantné funkcie s hodnotami y_α, kde $\alpha < 2^{\aleph_0}$ je také, že $E_\alpha \in CL(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{E}$. Potom $\mathcal{E} = E_\mathcal{G}(\mathcal{F})$.

Zväz $\mathcal{K}_{\mathcal{G}}$ obsahujúci všetky neprázdne dedičné systémy

Veta

Existuje $\mathcal{G} \subseteq C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ taký, že $\mathcal{E} \in \mathcal{K}_{\mathcal{G}}$ pre každý neprázdny dedičný systém $\mathcal{E} \subseteq CL(\mathbb{R})$.

Dôkaz

Nech $\{E_\alpha \colon \alpha < 2^{\aleph_0}\}$ je očíslovanie systému všetkých uzavretých množín. Indukciou pre $\alpha < 2^{\aleph_0}$ definujme $x_\alpha, y_\alpha \in \mathbb{R}$ a $g_{\alpha,n} \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tak, aby pre každý interval I spĺňajúci $E_\alpha \cap I \neq \emptyset$ existovalo $n \in \omega$ také, že

- $g_{\alpha,n}(x_\beta) \neq y_\beta$ pre všetky $\beta < \alpha$,
- $g_{\alpha,n}(x) = y_\alpha$ pre všetky $x \notin I$.

Nech $\mathcal{G} = \{g_{\alpha,n} \colon \alpha < 2^{\aleph_0},\ n \in \omega\}$. Pre každý neprázdny dedičný systém $\mathcal{E} \subseteq CL(\mathbb{R})$, nech $\mathcal{F}$ je systém obsahujúci všetky konštantné funkcie s hodnotami y_α, kde $\alpha < 2^{\aleph_0}$ je také, že $E_\alpha \in CL(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{E}$. Potom $\mathcal{E} = E_{\mathcal{G}}(\mathcal{F})$.

Problém

Je možné definovať $\mathcal{G}$ konštruktívnym spôsobom?

Zväz $\mathcal{K}_{\mathcal{G}}$ pre systém $\mathcal{G}$ určený jednou funkciou

Označenie

Označme $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$.

Pre $f, g \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^*)$, označme:

- $f \leq g$ ak $(\forall x \in \mathbb{R})\ f(x) \leq g(x)$,
- $f < g$ ak $(\forall x \in \mathbb{R})\ f(x) < g(x)$.

Definujme intervaly funkcií:

- $(f, g) = \{h \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : f < h < g\}$,
- $[f, g] = \{h \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : f \leq h \leq g\}$,
- atď.

Zväz $\mathcal{K}_{\{g\}}$

Veta

Nech $g \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. *Potom* $\mathcal{K}_{\{g\}} = \{CL(E) \colon E \in CL(\mathbb{R})\}$.

Zväz $\mathcal{K}_{\{g\}}$

Veta

Nech $g \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. *Potom* $\mathcal{K}_{\{g\}} = \{CL(E) \colon E \in CL(\mathbb{R})\}$.

Ktoré systémy $\mathcal{G} \subseteq C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dávajú ten istý zväz?

Každú z inklúzií $\mathcal{K}_{\mathcal{G}} \supseteq \{CL(E) \colon E \in CL(\mathbb{R})\}$, $\mathcal{K}_{\mathcal{G}} \subseteq \{CL(E) \colon E \in CL(\mathbb{R})\}$ charakterizujeme zvlášť.

Zväz $\mathcal{K}_{\{g\}}$

Veta

Nech $g \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. *Potom* $\mathcal{K}_{\{g\}} = \{CL(E) \colon E \in CL(\mathbb{R})\}$.

Ktoré systémy $\mathcal{G} \subseteq C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dávajú ten istý zväz?

Každú z inklúzií $\mathcal{K}_{\mathcal{G}} \supseteq \{CL(E) \colon E \in CL(\mathbb{R})\}$, $\mathcal{K}_{\mathcal{G}} \subseteq \{CL(E) \colon E \in CL(\mathbb{R})\}$ charakterizujeme zvlášť.

Veta

Nech $\mathcal{G} \subseteq C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\mathcal{G} \neq \emptyset$. *Nasledujúce podmienky sú ekvivalentné.*

1. $\mathcal{K}_{\mathcal{G}} \supseteq \{CL(E) \colon E \in CL(\mathbb{R})\}$.
2. $\{\emptyset\} \in \mathcal{K}_{\mathcal{G}}$.
3. *Pre každé* $x \in \mathbb{R}$, $\{g(x) \colon g \in \mathcal{G}\} \neq \mathbb{R}$.

Zväz $\mathcal{K}_{\{g\}}$

Veta

Nech $\mathcal{G} \subseteq C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\mathcal{G} \neq \emptyset$. Nasledujúce podmienky sú ekvivalentné.

1. $\mathcal{K}_{\mathcal{G}} \subseteq \{CL(E) \colon E \in CL(\mathbb{R})\}$.
2. *Existujú $h_1, h_2 \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^*)$ také, že $\mathcal{G} = [h_1, h_2]$.*

Zväz $\mathcal{K}_{\{g\}}$

Veta

Nech $\mathcal{G} \subseteq C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\mathcal{G} \neq \emptyset$. *Nasledujúce podmienky sú ekvivalentné.*

1. $\mathcal{K}_{\mathcal{G}} \subseteq \{CL(E) \colon E \in CL(\mathbb{R})\}$.
2. *Existujú* $h_1, h_2 \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^*)$ *také, že* $\mathcal{G} = [h_1, h_2]$.

Dôsledok

Nech $\mathcal{G} \subseteq C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\mathcal{G} \neq \emptyset$. *Nasledujúce podmienky sú ekvivalentné.*

1. $\mathcal{K}_{\mathcal{G}} = \{CL(E) \colon E \in CL(\mathbb{R})\}$.
2. *Existujú* $h_1, h_2 \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^*)$ *také, že* $h_1 \leq h_2$, $h_1^{-1}[\mathbb{R}] \cup h_2^{-1}[\mathbb{R}] = \mathbb{R}$, $\mathcal{G} = [h_1, h_2]$.

Zväz $\mathcal{K}_{\{g\}}$

Veta

Nech $\mathcal{G} \subseteq C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$*,* $\mathcal{G} \neq \emptyset$*. Nasledujúce podmienky sú ekvivalentné.*

1. $\mathcal{K}_{\mathcal{G}} \subseteq \{CL(E) \colon E \in CL(\mathbb{R})\}$.
2. *Existujú* $h_1, h_2 \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^*)$ *také, že* $\mathcal{G} = [h_1, h_2]$.

Dôsledok

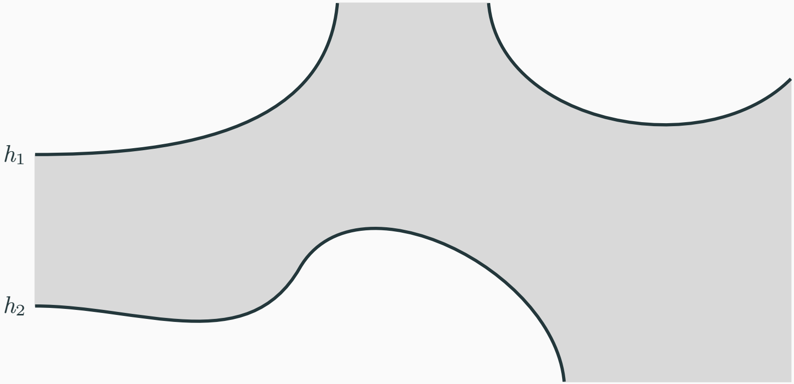
Nech $\mathcal{G} \subseteq C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$*,* $\mathcal{G} \neq \emptyset$*. Nasledujúce podmienky sú ekvivalentné.*

1. $\mathcal{K}_{\mathcal{G}} = \{CL(E) \colon E \in CL(\mathbb{R})\}$.
2. *Existujú* $h_1, h_2 \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^*)$ *také, že* $h_1 \leq h_2$, $h_1^{-1}[\mathbb{R}] \cup h_2^{-1}[\mathbb{R}] = \mathbb{R}$, $\mathcal{G} = [h_1, h_2]$.

Dôsledok

Nech $g \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$*. Potom*
$\mathcal{K}_{(-\infty, g]} = \mathcal{K}_{[g, \infty)} = \mathcal{K}_{\{g\}} = \{CL(E) \colon E \in CL(\mathbb{R})\}$.

Zväz $\mathcal{K}_{\{g\}}$



$$\mathcal{K}_{[h_1,h_2]} = \{CL(E)\colon E \in CL(\mathbb{R})\}$$

Zväz $\mathcal{K}_{(-\infty,g)}$

Pripomeňme, že $CL(X) = CL_{\mathbb{R}}(X) = \{E \in CL(\mathbb{R})\colon E \subseteq X\}$.

Zväz $\mathcal{K}_{(-\infty,g)}$

Pripomeňme, že $CL(X) = CL_{\mathbb{R}}(X) = \{E \in CL(\mathbb{R}) \colon E \subseteq X\}$.

Veta

Nech $g \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$. *Potom* $\mathcal{K}_{(-\infty,g)} = \{CL(X) \colon X \subseteq \mathbb{R}\}$.

Zväz $\mathcal{K}_{(-\infty,g)}$

Pripomeňme, že $CL(X) = CL_{\mathbb{R}}(X) = \{E \in CL(\mathbb{R}) \colon E \subseteq X\}$.

Veta

Nech $g \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Potom $\mathcal{K}_{(-\infty,g)} = \{CL(X) \colon X \subseteq \mathbb{R}\}$.

Veta

Nech $\mathcal{G} \subseteq C(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $\mathcal{G} \neq \emptyset$. Nasledujúce podmienky sú ekvivalentné.

1. $\mathcal{K}_{\mathcal{G}} \supseteq \{CL(X) \colon X \subseteq \mathbb{R}\}$.
2. *Pre každé $x \in \mathbb{R}$, $CL\big(\mathbb{R} \setminus \{x\}\big) \in \mathcal{K}_{\mathcal{G}}$.*
3. *Pre každé $x \in \mathbb{R}$ existuje $f \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ také, že $CL\big(\mathbb{R} \setminus \{x\}\big) = E_{\mathcal{G}}\big(\{f\}\big)$.*

Zväz $\mathcal{K}_{(-\infty,g)}$

Pripomeňme, že $CL(X) = CL_{\mathbb{R}}(X) = \{E \in CL(\mathbb{R})\colon E \subseteq X\}$.

Veta

Nech $g \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$. *Potom* $\mathcal{K}_{(-\infty,g)} = \{CL(X)\colon X \subseteq \mathbb{R}\}$.

Veta

Nech $\mathcal{G} \subseteq C(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $\mathcal{G} \neq \emptyset$. *Nasledujúce podmienky sú ekvivalentné.*

1. $\mathcal{K}_{\mathcal{G}} \supseteq \{CL(X)\colon X \subseteq \mathbb{R}\}$.
2. *Pre každé* $x \in \mathbb{R}$, $CL\big(\mathbb{R} \setminus \{x\}\big) \in \mathcal{K}_{\mathcal{G}}$.
3. *Pre každé* $x \in \mathbb{R}$ *existuje* $f \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *také, že* $CL\big(\mathbb{R} \setminus \{x\}\big) = E_{\mathcal{G}}\big(\{f\}\big)$.

Systém $\big\{CL\big(\mathbb{R} \setminus \{x\}\big) : x \in \mathbb{R}\big\}$ v podmienke 2 je minimálny, teda vylúčením ľubovoľnej množiny dostaneme ostro slabšiu podmienku.

Zväz $\mathcal{K}_{(-\infty,g)}$

Stotožňujeme funkciu $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a jej graf $f \subseteq \mathbb{R}^2$.

Zväz $\mathcal{K}_{(-\infty,g)}$

Stotožňujeme funkciu $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a jej graf $f \subseteq \mathbb{R}^2$.

Definícia

Systém $\mathcal{G} \subseteq C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ je:

- *úplný, ak pre všetky $g \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$, ak $g \subseteq \bigcup \mathcal{G}$ tak $g \in \mathcal{G}$*

Zväz $\mathcal{K}_{(-\infty,g)}$

Stotožňujeme funkciu $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a jej graf $f \subseteq \mathbb{R}^2$.

Definícia

Systém $\mathcal{G} \subseteq C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ je:

- *úplný, ak pre všetky $g \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, ak $g \subseteq \bigcup \mathcal{G}$ tak $g \in \mathcal{G}$*
- *súvislý, ak pre všetky $(x, y), (x', y') \in \bigcup \mathcal{G}$ také, že $x \neq x'$, existuje $g \in \mathcal{G}$ také, že $g(x) = y$ a $g(x') = y'$*

Zväz $\mathcal{K}_{(-\infty,g)}$

Stotožňujeme funkciu $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a jej graf $f\subseteq\mathbb{R}^2$.

Definícia

Systém $\mathcal{G}\subseteq C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ je:

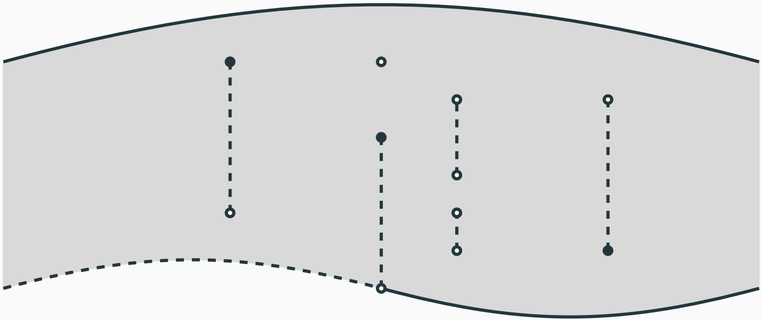
- *úplný, ak pre všetky $g\in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$, ak $g\subseteq\bigcup\mathcal{G}$ tak $g\in\mathcal{G}$*
- *súvislý, ak pre všetky $(x,y),(x',y')\in\bigcup\mathcal{G}$ také, že $x\neq x'$, existuje $g\in\mathcal{G}$ také, že $g(x)=y$ a $g(x')=y'$*

Veta

Nech $\mathcal{G}\subseteq C(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $\mathcal{G}\neq\emptyset$. Nasledujúce podmienky sú ekvivalentné.

1. $\mathcal{K}_{\mathcal{G}}\subseteq\{CL(X)\colon X\subseteq\mathbb{R}\}$.
2. *$\mathcal{G}$ je úplný a súvislý.*

Zväz $\mathcal{K}_{(-\infty,g)}$



$\bigcup \mathcal{G}$ pre úplný a súvislý systém $\mathcal{G}$

Zväz $\mathcal{K}_{(-\infty,g)}$

Dôsledok

Nech $\mathcal{G} \subseteq C(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $\mathcal{G} \neq \emptyset$. Nasledujúce podmienky sú ekvivalentné.

1. $\mathcal{K}_{\mathcal{G}} = \{CL(X) \colon X \subseteq \mathbb{R}\}$.
2. *Systém $\mathcal{G}$ je úplný a súvislý a pre každé $x \in \mathbb{R}$ existuje funkcia $f \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ taká, že $f \setminus \bigcup \mathcal{G} = f \restriction \{x\}$.*

Zväz $\mathcal{K}_{(-\infty,g)}$

Dôsledok

Nech $\mathcal{G} \subseteq C(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $\mathcal{G} \neq \emptyset$. Nasledujúce podmienky sú ekvivalentné.

1. $\mathcal{K}_{\mathcal{G}} = \{CL(X) \colon X \subseteq \mathbb{R}\}$.
2. *Systém $\mathcal{G}$ je úplný a súvislý a pre každé $x \in \mathbb{R}$ existuje funkcia $f \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ taká, že $f \setminus \bigcup \mathcal{G} = f \restriction \{x\}$.*

Dôsledok

Nech $g \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Potom $\mathcal{K}_{(g,\infty)} = \mathcal{K}_{(-\infty,g)} = \{CL(X) \colon X \subseteq \mathbb{R}\}$.

Zväz $\mathcal{K}_{(-\infty,g)\cup(g,\infty)}$

Definícia

Systém $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$ je separovaný ak pre navzájom rôzne $X, Y \in \mathcal{X}$ existujú disjunktné otvorené $U, V \subseteq \mathbb{R}$ také, že:

- $X \subseteq U \wedge Y \subseteq V$
- $(\forall Z \in \mathcal{X})\ Z \subseteq U \vee Z \subseteq V$

Zväz $\mathcal{K}_{(-\infty,g)\cup(g,\infty)}$

Definícia

Systém $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$ je separovaný ak pre navzájom rôzne $X, Y \in \mathcal{X}$ existujú disjunktné otvorené $U, V \subseteq \mathbb{R}$ také, že:

- $X \subseteq U \wedge Y \subseteq V$
- $(\forall Z \in \mathcal{X})\ Z \subseteq U \vee Z \subseteq V$

Veta

Nech $g \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Potom
$\mathcal{K}_{(-\infty,g)\cup(g,\infty)} = \left\{ \bigcup_{X \in \mathcal{X}} CL(X) \colon \mathcal{X} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}) \text{ je separovaný} \right\}.$

Zväz $\mathcal{K}_{(-\infty,g)\cup(g,\infty)}$

Pre otvorenú množinu $U \subseteq \mathbb{R}$ označme $U' = \mathbb{R} \setminus \operatorname{cl} U$.

Fakt

Ak U je regulárna otvorená, tak U' je regulárna otvorená a platí $U \cap U' = \emptyset$.

Zväz $\mathcal{K}_{(-\infty,g)\cup(g,\infty)}$

Pre otvorenú množinu $U \subseteq \mathbb{R}$ označme $U' = \mathbb{R} \setminus \operatorname{cl} U$.

Fakt

Ak U je regulárna otvorená, tak U' je regulárna otvorená a platí $U \cap U' = \emptyset$.

Veta

Nech $\mathcal{G} \subseteq C(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $\mathcal{G} \neq \emptyset$. Nasledujúce podmienky sú ekvivalentné.

1. $\mathcal{K}_{\mathcal{G}} \supseteq \left\{ \bigcup_{X\in\mathcal{X}} CL(X) \colon \mathcal{X} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}) \text{ je separovaný} \right\}$.

Zväz $\mathcal{K}_{(-\infty,g)\cup(g,\infty)}$

Pre otvorenú množinu $U \subseteq \mathbb{R}$ označme $U' = \mathbb{R} \setminus \operatorname{cl} U$.

Fakt

Ak U je regulárna otvorená, tak U' je regulárna otvorená a platí $U \cap U' = \emptyset$.

Veta

Nech $\mathcal{G} \subseteq C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\mathcal{G} \neq \emptyset$. Nasledujúce podmienky sú ekvivalentné.

1. $\mathcal{K}_{\mathcal{G}} \supseteq \left\{ \bigcup_{X \in \mathcal{X}} CL(X) \colon \mathcal{X} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}) \text{ je separovaný} \right\}$.
2. (2a) *Pre každé* $x \in \mathbb{R}$, $CL\big(\mathbb{R} \setminus \{x\}\big) \in \mathcal{K}_{\mathcal{G}}$, *a*
   (2b) *pre každú regulárnu otvorenú* $U \subseteq \mathbb{R}$, $CL(U) \cup CL(U') \in \mathcal{K}_{\mathcal{G}}$.

Zväz $\mathcal{K}_{(-\infty,g)\cup(g,\infty)}$

Pre otvorenú množinu $U \subseteq \mathbb{R}$ označme $U' = \mathbb{R} \setminus \operatorname{cl} U$.

Fakt

Ak U je regulárna otvorená, tak U' je regulárna otvorená a platí $U \cap U' = \emptyset$.

Veta

Nech $\mathcal{G} \subseteq C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\mathcal{G} \neq \emptyset$. Nasledujúce podmienky sú ekvivalentné.

1. $\mathcal{K}_{\mathcal{G}} \supseteq \left\{ \bigcup_{X \in \mathcal{X}} CL(X) \colon \mathcal{X} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}) \text{ je separovaný} \right\}$.
2. (2a) *Pre každé $x \in \mathbb{R}$, $CL\big(\mathbb{R} \setminus \{x\}\big) \in \mathcal{K}_{\mathcal{G}}$, a*
   (2b) *pre každú regulárnu otvorenú $U \subseteq \mathbb{R}$, $CL(U) \cup CL(U') \in \mathcal{K}_{\mathcal{G}}$.*
3. (3a) *Pre každé $x \in \mathbb{R}$ existuje funkcia $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ taká, že $CL\big(\mathbb{R} \setminus \{x\}\big) = E_{\mathcal{G}}\big(\{f\}\big)$, a*
   (3b) *pre každé $x, y \in \mathbb{R}$ a každú regulárnu otvorenú $U \subseteq \mathbb{R}$ takú, že $x \in U$, $y \in U'$, existuje funkcia $f \in F_{\mathcal{G}}\big(CL(U) \cup CL(U')\big)$ taká, že $f \restriction \{x, y\} \notin \mathcal{G} \restriction \{x, y\}$.*

Zväz $\mathcal{K}_{(-\infty,g)\cup(g,\infty)}$

Veta

Nech $\mathcal{G} \subseteq C(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $\mathcal{G} \neq \emptyset$. Nasledujúce podmienky sú ekvivalentné.

1. $\mathcal{K}_{\mathcal{G}} \subseteq \left\{ \bigcup_{X \in \mathcal{X}} CL(X) \colon \mathcal{X} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}) \text{ je separovaný} \right\}$.

Veta

Nech $\mathcal{G} \subseteq C(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $\mathcal{G} \neq \emptyset$. Nasledujúce podmienky sú ekvivalentné.

1. $\mathcal{K}_{\mathcal{G}} \subseteq \left\{\bigcup_{X\in\mathcal{X}} CL(X) \colon \mathcal{X} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})\text{ je separovaný}\right\}$.
2. *Existuje spočítateľná lineárne usporiadaná množina* $(I,<)$ *a systém* $\{\mathcal{G}_i \colon i \in I\}$ *taký, že*

Zväz $\mathcal{K}_{(-\infty,g)\cup(g,\infty)}$

Veta

Nech $\mathcal{G} \subseteq C(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $\mathcal{G} \neq \emptyset$. Nasledujúce podmienky sú ekvivalentné.

1. $\mathcal{K}_{\mathcal{G}} \subseteq \left\{\bigcup_{X\in\mathcal{X}} CL(X) : \mathcal{X} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}) \text{ je separovaný}\right\}$.
2. *Existuje spočítateľná lineárne usporiadaná množina $(I,<)$ a systém $\{\mathcal{G}_i : i \in I\}$ taký, že*
   (a) $\mathcal{G} = \bigcup_{i\in I} \mathcal{G}_i$,

Zväz $\mathcal{K}_{(-\infty,g)\cup(g,\infty)}$

Veta

Nech $\mathcal{G} \subseteq C(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $\mathcal{G} \neq \emptyset$. Nasledujúce podmienky sú ekvivalentné.

1. $\mathcal{K}_{\mathcal{G}} \subseteq \left\{\bigcup_{X\in\mathcal{X}} CL(X) \colon \mathcal{X} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}) \text{ je separovaný}\right\}$.
2. *Existuje spočítateľná lineárne usporiadaná množina $(I,<)$ a systém $\{\mathcal{G}_i \colon i \in I\}$ taký, že*
   (a) $\mathcal{G} = \bigcup_{i\in I} \mathcal{G}_i$,
   (b) *pre každé $i \in I$, $\mathcal{G}_i \subseteq C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ je úplný a súvislý,*

Zväz $\mathcal{K}_{(-\infty,g)\cup(g,\infty)}$

Veta

Nech $\mathcal{G} \subseteq C(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $\mathcal{G} \neq \emptyset$. Nasledujúce podmienky sú ekvivalentné.

1. $\mathcal{K}_{\mathcal{G}} \subseteq \left\{ \bigcup_{X\in\mathcal{X}} CL(X) \colon \mathcal{X} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}) \text{ je separovaný} \right\}$.
2. *Existuje spočítateľná lineárne usporiadaná množina $(I,<)$ a systém $\{\mathcal{G}_i \colon i \in I\}$ taký, že*
   (a) $\mathcal{G} = \bigcup_{i\in I} \mathcal{G}_i$,
   (b) *pre každé $i \in I$, $\mathcal{G}_i \subseteq C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ je úplný a súvislý,*
   (c) *pre každé $i \in I$ existujú funkcie $g_i^-, g_i^+ \in C(\mathbb{R},\mathbb{R}^*)$ také, že*

$$\bigcup_{j<i} \mathcal{G}_j \subseteq (-\infty, g_i^-)\,, \quad \mathcal{G}_i \subseteq (g_i^-, g_i^+)\,, \quad \text{a} \quad \bigcup_{j>i} \mathcal{G}_j \subseteq (g_i^+, \infty)\,.$$

Lattice $\mathcal{K}_{(-\infty,g)\cup(g,\infty)}$

Zväz $\mathcal{K}_{\mathcal{G}}$ pre systém $\mathcal{G}$ tvorený polynomiálnymi funkciami

Systém všetkých konštantných funkcií

Označme Const $\subseteq C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ systém všetkých konštantných funkcií.

Systém všetkých konštantných funkcií

Označme Const $\subseteq C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ systém všetkých konštantných funkcií.

Tvrdenie

Nech $\mathcal{E} \in \mathcal{K}_{\mathsf{Const}}$. *Potom:*

1. $\{x\} \in \mathcal{E}$ *pre všetky* $x \in \mathbb{R}$.

Systém všetkých konštantných funkcií

Označme Const $\subseteq C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ systém všetkých konštantných funkcií.

Tvrdenie

Nech $\mathcal{E} \in \mathcal{K}_{\mathsf{Const}}$. *Potom:*

1. $\{x\} \in \mathcal{E}$ *pre všetky* $x \in \mathbb{R}$.
2. *Ak* $A, B \in \mathcal{E}$ *a* $A \cap B \neq \emptyset$, *tak* $A \cup B \in \mathcal{E}$.

Systém všetkých konštantných funkcií

Označme Const $\subseteq C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ systém všetkých konštantných funkcií.

Tvrdenie

Nech $\mathcal{E} \in \mathcal{K}_{\mathsf{Const}}$. Potom:

1. $\{x\} \in \mathcal{E}$ *pre všetky* $x \in \mathbb{R}$.
2. *Ak* $A, B \in \mathcal{E}$ *a* $A \cap B \neq \emptyset$, *tak* $A \cup B \in \mathcal{E}$.
3. *Systém* $\mathcal{R}_{\mathcal{E}}$ *všetkých maximálnych prvkov* $\mathcal{E}$ *tvorí rozklad* $\mathbb{R}$ *na uzavreté množiny.*

Systém všetkých konštantných funkcií

Označme Const $\subseteq C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ systém všetkých konštantných funkcií.

Tvrdenie

Nech $\mathcal{E} \in \mathcal{K}_{\mathsf{Const}}$. Potom:

1. $\{x\} \in \mathcal{E}$ *pre všetky* $x \in \mathbb{R}$.
2. *Ak* $A, B \in \mathcal{E}$ *a* $A \cap B \neq \emptyset$, *tak* $A \cup B \in \mathcal{E}$.
3. *Systém* $\mathcal{R}_{\mathcal{E}}$ *všetkých maximálnych prvkov* $\mathcal{E}$ *tvorí rozklad* $\mathbb{R}$ *na uzavreté množiny.*
4. *Rozklad* $\mathcal{R}_{\mathcal{E}}$ *je určený reláciou ekvivalencie* $\sim_{\mathcal{E}}$ *definovanou vzťahom*

$$x \sim_{\mathcal{E}} y \quad \Longleftrightarrow \quad \{x, y\} \in \mathcal{E}.$$

Systém všetkých konštantných funkcií

Označme Const $\subseteq C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ systém všetkých konštantných funkcií.

Tvrdenie

Nech $\mathcal{E} \in \mathcal{K}_{\text{Const}}$. Potom:

1. $\{x\} \in \mathcal{E}$ *pre všetky* $x \in \mathbb{R}$.
2. *Ak* $A, B \in \mathcal{E}$ *a* $A \cap B \neq \emptyset$, *tak* $A \cup B \in \mathcal{E}$.
3. *Systém* $\mathcal{R}_{\mathcal{E}}$ *všetkých maximálnych prvkov* $\mathcal{E}$ *tvorí rozklad* $\mathbb{R}$ *na uzavreté množiny.*
4. *Rozklad* $\mathcal{R}_{\mathcal{E}}$ *je určený reláciou ekvivalencie* $\sim_{\mathcal{E}}$ *definovanou vzťahom*
$$x \sim_{\mathcal{E}} y \quad \iff \quad \{x, y\} \in \mathcal{E}.$$
5. *Ekvivalencia* $\sim_{\mathcal{E}}$ *má uzavretý graf, teda je to uzavretá podmnožina* $\mathbb{R}^2$.

Systém všetkých konštantných funkcií

Veta (Bourbaki)

Nech X je σ-lokálne kompaktný priestor a nech $R \subseteq X^2$ je relácia ekvivalencie s uzavretým grafom. Potom kvocientový priestor X/R je Hausdorffov.

Systém všetkých konštantných funkcií

Veta (Bourbaki)

Nech X je σ-lokálne kompaktný priestor a nech $R \subseteq X^2$ je relácia ekvivalencie s uzavretým grafom. Potom kvocientový priestor X/R je Hausdorffov.

Dôsledok

$\mathcal{K}_{\mathsf{Const}} = \left\{ \bigcup_{x\in\mathbb{R}} CL([x]_R) \colon\ R \subseteq \mathbb{R}^2 \textit{ je ekvivalencia s uzavretým grafom} \right\}.$

Systém všetkých lineárnych funkcií

Označme Lin $= \{f_a \colon a \in \mathbb{R}\}$, kde $f_a(x) = ax$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$.

Systém všetkých lineárnych funkcií

Označme Lin $= \{f_a \colon a \in \mathbb{R}\}$, kde $f_a(x) = ax$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$.

Tvrdenie

Nech $\mathcal{E} \in \mathcal{K}_{\mathsf{Lin}}$. Potom:

1. $\{x\} \in \mathcal{E}$ *pre všetky* $x \neq 0$.

Systém všetkých lineárnych funkcií

Označme Lin $= \{f_a\colon a \in \mathbb{R}\}$, kde $f_a(x) = ax$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$.

Tvrdenie

Nech $\mathcal{E} \in \mathcal{K}_{\mathsf{Lin}}$. Potom:

1. $\{x\} \in \mathcal{E}$ *pre všetky* $x \neq 0$.
2. *Ak* $A, B \in \mathcal{E}$ *a* $(A \cap B) \setminus \{0\} \neq \emptyset$, *tak* $A \cup B \in \mathcal{E}$.

Systém všetkých lineárnych funkcií

Označme Lin $= \{f_a \colon a \in \mathbb{R}\}$, kde $f_a(x) = ax$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$.

Tvrdenie

Nech $\mathcal{E} \in \mathcal{K}_{\mathrm{Lin}}$. Potom:

1. $\{x\} \in \mathcal{E}$ *pre všetky* $x \neq 0$.
2. *Ak* $A, B \in \mathcal{E}$ a $(A \cap B) \setminus \{0\} \neq \emptyset$, *tak* $A \cup B \in \mathcal{E}$.
3. *Ak* $\{0\} \in \mathcal{E}$, *tak* $E \cup \{0\} \in \mathcal{E}$ *pre všetky* $E \in \mathcal{E}$.

Systém všetkých lineárnych funkcií

Označme Lin $= \{f_a \colon a \in \mathbb{R}\}$, kde $f_a(x) = ax$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$.

Tvrdenie

Nech $\mathcal{E} \in \mathcal{K}_{\mathrm{Lin}}$. Potom:

1. $\{x\} \in \mathcal{E}$ *pre všetky* $x \neq 0$.
2. *Ak* $A, B \in \mathcal{E}$ *a* $(A \cap B) \setminus \{0\} \neq \emptyset$*, tak* $A \cup B \in \mathcal{E}$.
3. *Ak* $\{0\} \in \mathcal{E}$*, tak* $E \cup \{0\} \in \mathcal{E}$ *pre všetky* $E \in \mathcal{E}$.
4. *Ak* $\{0\} \notin \mathcal{E}$*, tak* $\mathcal{E} \cup \big\{\{0\}\big\} \in \mathcal{K}_{\mathrm{Lin}}$.

Systém všetkých lineárnych funkcií

Označme:

- $\mathcal{S}$ systém všetkých ekvivalencií $R \subseteq \mathbb{R}^2$ s uzavretým grafom,
- $\mathcal{S}_0 = \big\{R \in \mathcal{S} \colon [0]_R = \{0\}\big\}$.

Systém všetkých lineárnych funkcií

Označme:

- $\mathcal{S}$ systém všetkých ekvivalencií $R \subseteq \mathbb{R}^2$ s uzavretým grafom,
- $\mathcal{S}_0 = \big\{R \in \mathcal{S} \colon [0]_R = \{0\}\big\}$.

Veta

$\mathcal{K}_{\mathsf{Lin}} = \Big\{\bigcup_{x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}} \big([x]_R \cup \{0\}\big) \colon R \in \mathcal{S}\Big\} \cup \Big\{\bigcup_{x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}} [x]_R \colon R \in \mathcal{S}_0\Big\}$.

Systém všetkých polynomiálnych funkcií stupňa $\leq n$

Označme $\mathrm{Pol}_n \subseteq C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ systém všetkých polynomiálnych funkcií stupňa $\leq n$.

Systém všetkých polynomiálnych funkcií stupňa $\leq n$

Označme Pol$_n \subseteq C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ systém všetkých polynomiálnych funkcií stupňa $\leq n$.

Tvrdenie

Nech $\mathcal{E} \in \mathrm{Pol}_n$. Potom:

1. *$E \in \mathcal{E}$ pre každú $E \subseteq \mathbb{R}$ takú, že $|E| \leq n + 1$.*

Systém všetkých polynomiálnych funkcií stupňa $\leq n$

Označme $\mathrm{Pol}_n \subseteq C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ systém všetkých polynomiálnych funkcií stupňa $\leq n$.

Tvrdenie

Nech $\mathcal{E} \in \mathrm{Pol}_n$. Potom:

1. $E \in \mathcal{E}$ *pre každú* $E \subseteq \mathbb{R}$ *takú, že* $|E| \leq n + 1$.
2. *Ak* $A, B \in \mathcal{E}$ *a* $|A \cap B| > n + 1$, *tak* $A \cup B \in \mathcal{E}$.

Systém všetkých polynomiálnych funkcií stupňa $\leq n$

Označme $\mathsf{Pol}_n \subseteq C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ systém všetkých polynomiálnych funkcií stupňa $\leq n$.

Tvrdenie

Nech $\mathcal{E} \in \mathsf{Pol}_n$. Potom:

1. *$E \in \mathcal{E}$ pre každú $E \subseteq \mathbb{R}$ takú, že $|E| \leq n+1$.*
2. *Ak $A, B \in \mathcal{E}$ a $|A \cap B| > n+1$, tak $A \cup B \in \mathcal{E}$.*
3. *$(n+1)$-árna relácia R definovaná vzťahom*

$$(x_1, \dots, x_{n+1}) \in R \iff \{x_1, \dots, x_{n+1}\} \in \mathcal{E}$$

je $(n+1)$-ekvivalencia na $\mathbb{R}$ s uzavretým grafom.

Systém všetkých polynomiálnych funkcií stupňa $\leq n$

Definícia

n-árna relácia R je n-ekvivalencia na X, ak:

1. $(x, \ldots, x) \in R$ *pre každé* $x \in X$,
2. *pre každú permutáciu* σ, *ak* $(x_1, \ldots, x_n) \in R$, *tak* $(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) \in R$,
3. *ak* $x_1, \ldots, x_{n-1}$ *sú navzájom rôzne a* $(x_1, \ldots, x_{n-1}, y_i) \in R$ *pre každé* $i \in \{1, \ldots, n\}$, *tak* $(y_1, \ldots, y_n) \in R$.

Systém všetkých polynomiálnych funkcií stupňa $\leq n$

Definícia

n-árna relácia R je n-ekvivalencia na X, ak:

1. $(x, \dots, x) \in R$ *pre každé* $x \in X$,
2. *pre každú permutáciu* σ, *ak* $(x_1, \dots, x_n) \in R$, *tak* $(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) \in R$,
3. *ak* $x_1, \dots, x_{n-1}$ *sú navzájom rôzne a* $(x_1, \dots, x_{n-1}, y_i) \in R$ *pre každé* $i \in \{1, \dots, n\}$, *tak* $(y_1, \dots, y_n) \in R$.

Problém

Nech R je $(n+1)$-ekvivalencia na $\mathbb{R}$ s uzavetým grafom. Nech $\mathcal{E}$ je systém všetkých množín $E \in CL(\mathbb{R})$ takých, že $(x_1, \dots x_{n+1}) \in R$ pre všetky $x_1, \dots x_{n+1} \in E$. Bude $\mathcal{E} \in \mathcal{K}_{\mathsf{Pol}_n}$?

Ďakujem za pozornosť!