# Štvorec na deterministických, alternujúcich a booleovských automatoch

marec 2017

# Alternujúce automaty

$M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$, kde $\delta$ mapuje $Q \times \Sigma$

$M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$, kde $\delta$ mapuje $Q \times \Sigma$ do

jediného stavu v DFA

| $\delta$ | $a$ | $b$ |
|---|---|---|
| $\rightarrow q_1$ | $q_2$ | $q_2$ |
| $\leftarrow q_2$ | $q_2$ | $q_1$ |

# Alternujúce automaty

$M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$, kde $\delta$ mapuje $Q \times \Sigma$ do

jediného stavu v DFA

| $\delta$ | $a$ | $b$ |
|---|---|---|
| $\rightarrow q_1$ | $q_2$ | $q_2$ |
| $\leftarrow q_2$ | $q_2$ | $q_1$ |

zjednotenia stavov v NFA

| $\delta$ | $a$ | $b$ |
|---|---|---|
| $\rightarrow q_1$ | $q_1 \vee q_2$ | $q_2$ |
| $\leftarrow q_2$ | $q_2$ | $q_1$ |

# Alternujúce automaty

$M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$, kde $\delta$ mapuje $Q \times \Sigma$ do

jediného stavu v DFA

| $\delta$ | $a$ | $b$ |
|---|---|---|
| $\rightarrow q_1$ | $q_2$ | $q_2$ |
| $\leftarrow q_2$ | $q_2$ | $q_1$ |

zjednotenia stavov v NFA

| $\delta$ | $a$ | $b$ |
|---|---|---|
| $\rightarrow q_1$ | $q_1 \vee q_2$ | $q_2$ |
| $\leftarrow q_2$ | $q_2$ | $q_1$ |

booleovskej funkcie v AFA/BFA

| $\delta$ | $a$ | $b$ |
|---|---|---|
| $\rightarrow q_1$ | $q_2$ | $q_1 \wedge \neg q_2$ |
| $\leftarrow q_2$ | $q_1$ | $\neg q_1$ |

# Definícia AFA/BFA (od Fellah, Jürgensen, Yu)

BFA $A = (Q, \Sigma, \delta, g_s, F)$:

- $Q = \{q_1, \dots q_n\}$
- $\mathcal{B}_n$ ...booleovské funkcie $n$ premenných $q_1, \dots, q_n$.
- $g_s \in \mathcal{B}_n$ ...počiatočná funkcia, pri AFA len jeden stav
- $\delta : Q \times \Sigma \to \mathcal{B}_n$ ...prechodová funkcia
  Rozšírime na $\mathcal{B}_n \times \Sigma^*$. Nech $g \in \mathcal{B}_n$, $a \in \Sigma$, $w \in \Sigma^*$:
  1. $\delta(g, \varepsilon) = g$;
  2. ak $g = g(q_1, q_2, \dots, q_n)$ tak
     $\delta(g, a) = g(\delta(q_1, a), \delta(q_2, a), \dots, \delta(q_n, a))$;
  3. $\delta(g, aw) = \delta(\delta(g, a), w)$.

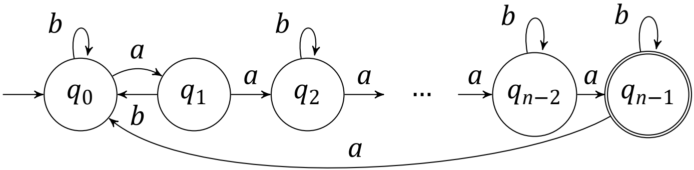
# BFA/AFA pre $L \Leftrightarrow$ DFA pre $L^R$

- Ak $L$ je akceptovaný $n$ stavovým BFA(AFA), potom $L^R$ je akceptovaný $2^n$ stavovým DFA, (ktorý má $2^{n-1}$ stavov koncových).
- Ak jazyk $L^R$ je akceptovaný $2^n$ stavovým DFA (s práve $2^{n-1}$ koncovými stavmi), potom $L$ je akceptovaný $n$ stavovým BFA (AFA).

# Známe výsledky I

$L^2 = LL = \{uv \mid u \in L, v \in L\}$

- [Yu, Zhuang, Salomaa, 1994]
  Ak $L$ je akceptovaný $n$ stavovým DFA s $k$ koncovými stavmi, tak minimálny DFA pre $L^2$ má najviac $n2^n - k2^{n-1}$ stavov.
- [Rampersad, 2006]
  Existuje DFA pre $L$ s $n$ stavmi, kde $k = 1$ taký, že min. DFA pre $L^2$ má $n2^n - 2^{n-1}$ stavov:

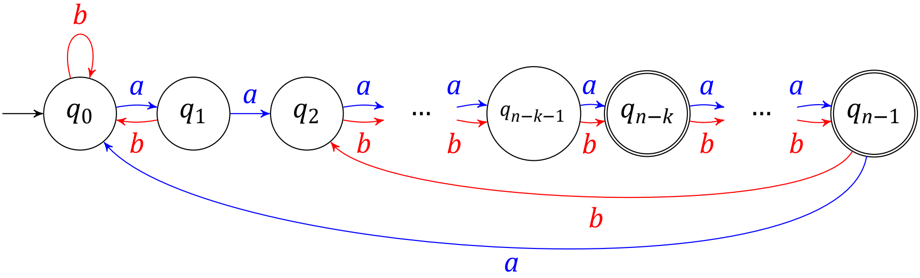


# Známe výsledky II

- [Čevorová, Jirásková, Krajňáková, 2014]
  DFA pre štvorec Rampersadovho automatu s $k \leq n-2$ koncovými stavmi rozšírený o tretie písmeno má $n2^n - k2^{n-1}$ stavov.
  Vznikli 2 otvorené problémy:
  (P1) koľko stavov potrebuje štvorec binárneho automatu s $k \leq n-2$ koncovými stavmi
  (P2) aké veľké sú automaty pre štvorce jazykov, ktoré sú akceptované automatmi s jediným nekoncovým stavom

**Veta 1**

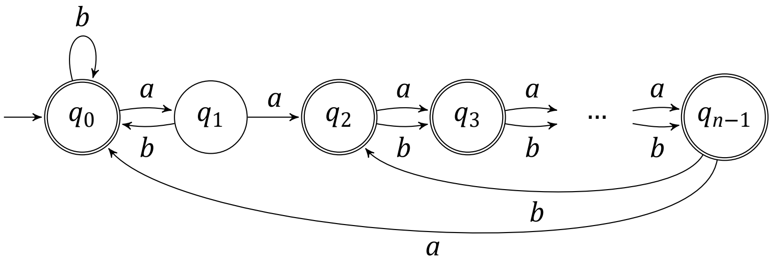
*Pre každé $n \geq 3$ existuje binárny deterministický automat $M_{n,k}$ s $n$ stavmi z ktorých je $k \leq n-2$ koncových taký, že minimálny DFA pre jazyk $L^2(M_{n,k})$ má $n2^n - k2^{n-1}$ stavov.*



# Štvorec na deterministických automatoch: $k = n - 1$

Nech DFA $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ je $n$ stavový automat pre jazyk $L$ s $k$ koncovými stavmi.

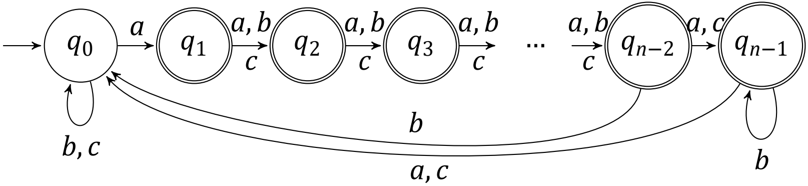
- Ak $k = n - 1$, tak DFA pre $L^2$ môže mať najviac $n2^n - (n-1)2^{n-1} = (2n+2)2^{n-2}$ stavov
  ... nikdy však až toľko
- Ak $q_0 \in F$, tak DFA pre $L^2$ má najviac $(n+2)2^{n-2}$ stavov;
  - pre každé $n$ sme našli binárny jazyk $L$, ktorého štvorec je taký zložitý



# Štvorec na deterministických automatoch: $k = n - 1$

Nech DFA $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ je $n$ stavový automat pre jazyk $L$ s $k$ koncovými stavmi.

- Ak $k = n - 1$, tak DFA pre $L^2$ môže mať najviac $(2n + 2)2^{n-2}$ stavov ... nikdy však až toľko
- Ak $q_0 \notin F$, tak DFA pre $L^2$ má najviac $(n + 3)2^{n-2}$ stavov;
  - našli sme ternárny jazyk taký, že DFA pre jeho štvorec má toľko stavov
  - našli sme však binárny jazyk, ktorého DFA pre štvorec má $(n + 3)2^{n-2} - 1$ stavov



Využitie?

Využitie?

# alternujúce automaty

- Ak $w = a_1 a_2 \cdots a_n \implies w^R = a_n \cdots a_2 a_1$
  $L^R = \{w^R \mid w \in L\}$
- [Fellah, Jürgensen, Yu, 1990]
  Ak $L$ je akceptovaný $n$ stavovým AFA,
  tak $L^2$ je akceptovaný $2^n + n + 1$ stavovým AFA.
- otvorený problém:
  Dosahuje sa však až taká veľká zložitosť?

# Štvorec na alternujúcich automatoch

Naša odpoveď je ÁNO:

**Veta 2**

*Pre každé $n$ existuje binárny jazyk $L$ akceptovaný $n$ stavovým AFA taký, že minimálny AFA pre $L^2$ má $2^n + n + 1$ stavov.*

Myšlienka dôkazu:

- $(L^2)^R = (L^R)^2$
- Nech $L^R$ je jazyk akceptovaný $M_{2^n,2^{n-1}} \implies$
  1) $L$ je akceptovaný AFA s $n$ stavmi
  2) minimálny AFA pre $L^2$ má $2^n + n + 1$ stavov $\square$

Zovšeobecnenie pre zreťazenie:

**Veta 3**

*Pre každé $m$ a $n$ existujú binárne jazyky $K, L$ akceptované $m$ a $n$ stavovými AFA také, že minimálny AFA pre $KL$ má $2^m + n + 1$ stavov.*

# Štvorec na booleovských automatoch

Booleovské automaty:

- počiatočná funkcia je ľubovoľná booleovská funkcia, napr. $g_s = q_1 \wedge \neg q_2$
- minimálny BFA pre štvorec má najviac $2^n + n$ stavov
- minimálny BFA pre zreťazenie má najviac $2^m + n$ stavov

**Veta 4**

*Pre každé $n$ existuje binárny jazyk $L$ akceptovaný $n$ stavovým BFA taký, že minimálny BFA pre $L^2$ má $2^n + n$ stavov.*

**Veta 5**

*Pre každé $m$ a $n$ existujú binárne jazyky $K, L$ akceptované $m$ a $n$ stavovými BFA také, že minimálny BFA pre $KL$ má $2^m + n$ stavov.*

Ďakujem za pozornosť