ČERNÉHO HYPOTÉZA PO 50 ROKOCH

Alica Kelemenová
Ústav informatiky
Slezská Univerzita v Opavě

1964 PRÍBEH ZAČÍNA

Ján Černý: Poznámka k homogénnym experimentom s konečnými automatmi.

Matematicko-fyzikálny časopis SAV, 1964, 208-215

O usmernitelných automatoch.

Článok zaslaný do tlače v roku 1962.

Autor pôsobí na Fakulty prevádzky a ekonomiky dopravy, Vysokej školy dopravnej v Žiline

O ČOM POJEDNÁVA ?

Na prelome 50tych a 60tych rokov sa teoretici zaoberali pokusmi s konečnými automatmi. Hľadali spôsob ako meniť vstupy a sledovať výstupy tak, aby vedeli v akom stave sa nachádza automat na konci pokusu.

Cituje 2 články Moore 1956,
Ginsburg 1956

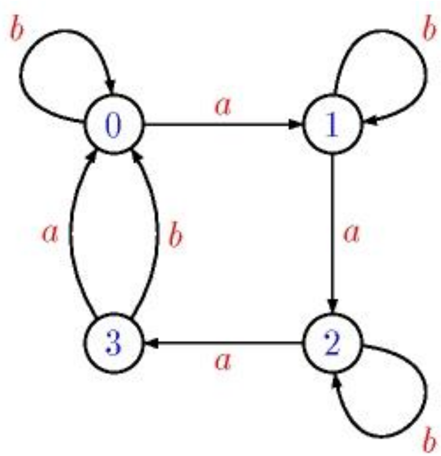
O ČOM POJEDNÁVA ?

„Položil som si otázku, či by sa to isté nedalo dosiahnuť s automatom, ktorý by mal v poriadku prijímač, ale mal pokazený vysielač. A zaviedol som pojem usmernitelnosti, usmerňujúceho slova a položil som si otázku, ako dlhé môže najkratšie takéto slovo byť v závislosti na počte stavov. Napísal som o tom roku 1964 známy základný článok.“ J.Černý, 2014

FORMÁLNE:

Definícia: *Deterministický konečný automat* je trojica A = (Q, Σ, δ), kde:

δ: Q × Σ → Q je deterministická prechodová funkcia

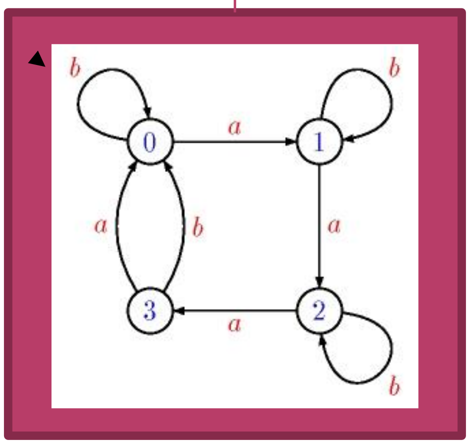


Definícia: Konečný automat $A = (Q, \Sigma, \delta)$ je *usmernitelný,* ak existuje slovo w, $w \in \Sigma^*$ a stav $q_w \in Q$ také, že $\delta(Q, w) = \{q_w\}$.

Slovo w nazývame usmerňujúcim slovom automatu.

PRÍKLAD:

b a a a b a a a b



Usmernitelný automat

	b	a	a	a	b	a	a	a	b
0	**0**	**1**	**2**	**3**	*0*	*1*	*2*	*3*	*0*
1	**1**	**2**	**3**	**0**	**0**	**1**	**2**	**3**	**0**
2	**2**	**3**	**0**	**1**	**1**	**2**	**3**	**0**	*0*
3	*0*	*1*	*2*	*3*	*0*	*1*	*2*	*3*	*0*

V ČLÁNKU RIEŠENÝ PROBLÉM

n(k) - Maximálna dĺžka najkratšieho usmerňujúceho slova n stavového usmernitelného automatu

Veta. *Nech k je ľubovoľné prirodzené číslo. Potom platí*

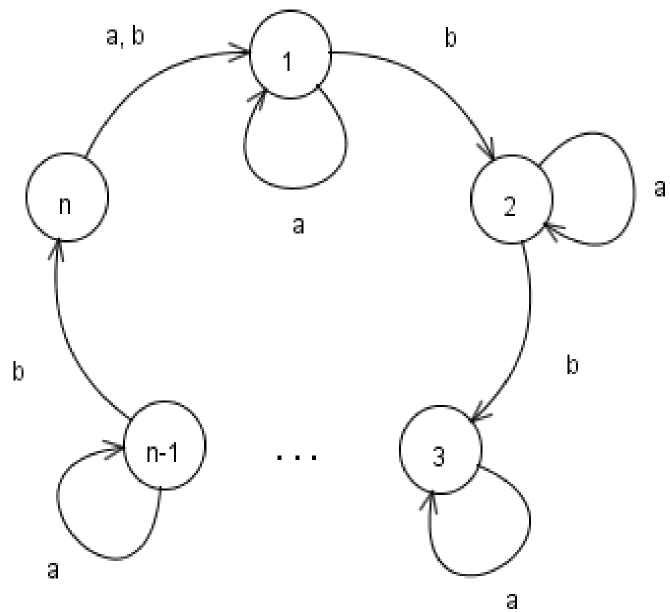
$$(k - 1)^2 \le n(k) \le 2^k - k - 1.$$

Pre *k = 1,2,3 je dolné ohraničenie pre n(k) rovné* hornému.

Dá sa očakávať, zníženie horného ohraničenia.

DOLNÝ ODHAD

Automat $\mathcal{C}_n$ je usmernitelný slovom $(ab^{n-1})^{n-2}$ s dĺžkou $(n-1)^2$.



Automat $\mathcal{C}_n$

KRITÉRIÁ USMERNITELNOSTI

1. Automat $\mathcal{P}A = (\mathcal{P}(Q), \Sigma, \delta)$.

   Všetky cesty z Q do {q} pre q z Q určujú usmerňujúce slová.

2. Automat $A^2 = (Q^2, \Sigma, \delta)$.

   Pokiaľ z každého stavu existuje cesta do stavu (q,q) tak automat je usmerniteľný.

ČERNÉHO HYPOTÉZA

- V roku 1965 na konferencii o kybernetike v Prahe mal J. Černý prednášku, na ktorej sformuloval svoju hypotézu $n(k) = (k - 1)^2$
- Na konferencii sa zúčastnil aj Jean-François Perrot, ktorého problém dosť zaujal a kuloárne sa ešte s autorom porozprávali. Po návrate do Paríža o tomto probléme hovoril so svojimi kolegami Dominique Perrinom, Jean-Eric Pinom ako o "La conjecture de Cerny".

KUBICKÝ H0RNÝ ODHAD

- Starke 1966

$$n(k) \leq 1 + 0.5k(k - 1)(k - 2)$$

- STARKE, P. *Eine bemerkung über homogene experimente*. Elektr. Informationverarbeitung und Kyb., vol. 2, 1966.

UPJŠ KOŠICE

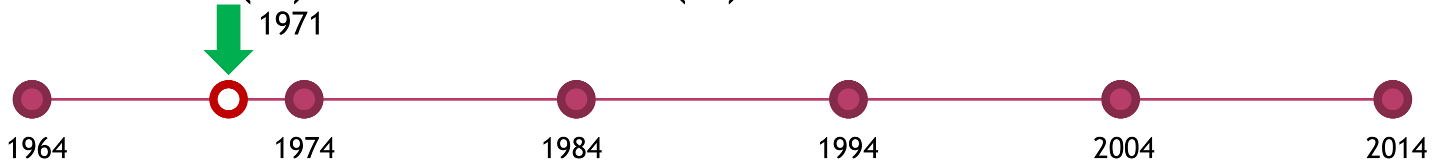
Doc. Černý pôsobí v Košiciach.
Problém dáva do pozornosti svojim
študentkám. 1967
Výsledkom sú články

J. Černý, A. Pirická, B. Rosenauerová: On directable automata. *Kybernetika* (1971) 287-298

A. Pirická: Directable automata and directly subdefinite events. *Kybernetika* (1972) 396-403

$$n(k) \leq 1/3k^3 - 3/2\, k^2 + 25/6\, k - 4$$

$$n(4) = 9 \qquad n(5) = 16$$



FRANCÚZKA ŠKOLA

Jean-Eric Pin bol doktorand Jean-François Perrota, a roku 1978 napísal záverečnú prácu:

1. Le problème de la synchronisation et la conjecture de Cerný, Thèse de 3ème cycle, Université Paris VI (1978)
2. PIN, J.-E. *Sur les mots synchronisants dans un auto-mate fini*. Elektron. Informationsverarb.Kybernet., vol. 14, 1978, s. 293-303.
3. PIN, J.-E. *On two combinatorial problems arising from automata theory*. Annals of Discrete Mathematics, vol. 17, 1983, s. 535-548.

DIZERTÁCIA J.E. PIN

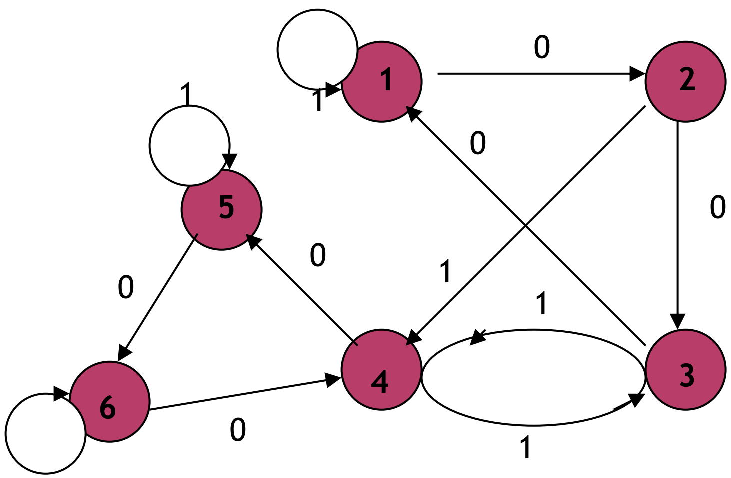
- Zobecnenie Černého hypotézy: Ak je možné **n** stavový automat usmerniť do ≤ **n-k** stavov, potom existuje takéto usmerňujúce slovo dĺžky ≤ $\mathbf{k^2}$:

  (**k = n-1** dáva Černého hypotézu.) Dizertácia obsahuje parciálne výsledky pre obidve hypotézy. Horný odhad **$(1/2 - \pi^2/36)n^3 + o(n^3)$.**
- Dokázaná **zobecnená hypotéza** pre **k = 1, 2** and **3** (**k = 3** vyžaduje detailnú kombinatorickú analýzu)
- Dolný odhad $\mathbf{k^2}$ je možné efektívne dosiahnuť.Horný odhad **$(1/3)k^3 - k^2 + (14/3)k - 5$**. Niekoľko špeciálnych prípadov

Zovšeobecnená hypotéza: (J.-E. Pin1978)

Pre každé *k*, každý n stavový usmerniteľný automat môže byť redukovaný na *n*-*k* stavov slovom dĺžky ≤ k^2.

Zobecnenú hypotézu vyvrátil J. Kari v roku 2001



10010 10 10011 010 01:

10010 10 010 01 010 01:

Pre dvojice 17 > $(6\text{-}2)^2$ písmen

1

STREDOŠKOLSKÁ PRÁCA

Peter Borovanský, Michal Winczer Gymnázium Novohradská 1981-1982

n(5) = 16 pre automaty s 2 signálmi

Borovanský,P., Winczer, M.: The Speed of Synchronization of Finite Automata, in Proceeding SOFSEM '82 1982, pp. 348-351, (In Slovak)

in Proceeding IMYCS '82 (2-nd International Meeting of Young Computer Scientists), 1982, pp. 198-201, (In Russian)

$n(5) = 16$

Náčrt dôkazu:
Všetky signály redukujú tú istú dvojicu: $n(5) \leq 15$

Permutačný signál $1 \leftrightarrow 2$, 3, 4, 5: $n(5, 2) \leq 16$

Permutačný signál $1 \leftrightarrow 2$, $3 \leftrightarrow 4$, 5: $n(5, 2) \leq 15$

prípady, keď redukovaná dvojica sa nerovná 12 ani 34 boli riešené počítačom

Permutačný signál 123, 4, 5: $n(5, 2) \leq 15$

prípady, keď redukovaná dvojica sa nerovná 45 boli analyzované počítačom

n(5) = 16

- Permutačný signál 123,45: $n(5, 2) \leq 15$
  - Prípad pre redukujúcu dvojicu odlišnú od 45 bol vyriešený počítačom.
- Permutačný signál 1234, 5: $n(5, 2) \leq 16$
- Permutačný signál 12345: $n(5, 2) \leq 16$

Jediný 5 stavový automat s $n(5,2) = 16$ je $\mathcal{C}_5$

POMALY USMERNITELNÉ AUTOMATY

$$(k - 1)^2 \leq n(k) \leq 1/6\ (k^3 - k)$$

Dlhé roky sa nedarí nájsť k stavový automat, ktorý by potreboval na usmernenie slovo dĺžky viac ako $(k - 1)^2$,

ale ani znížiť horný odhad na menej ako kubický.

(J.E. Pin 1983)

POMALY USMERNITELNÉ AUTOMATY

Problému dĺžky usmerňujúcich slov sa intenzívne venujú v Novosibirsku

A. N. Trahtman, M. V. Volkov, D. S. Ananichev,

V. V. Gusev, I. V. Petrov, Yu. I. Zaks, F. M. Fominykh,

P. V. Martyugin

2002 – 2013 publikovali 20 článkov zameraných na pomaly usmernitelné automaty. Triedy automatov s usmerňujúcimi slovami dĺžky O(k^2)

POMALY USMERNITELNÉ AUTOMATY

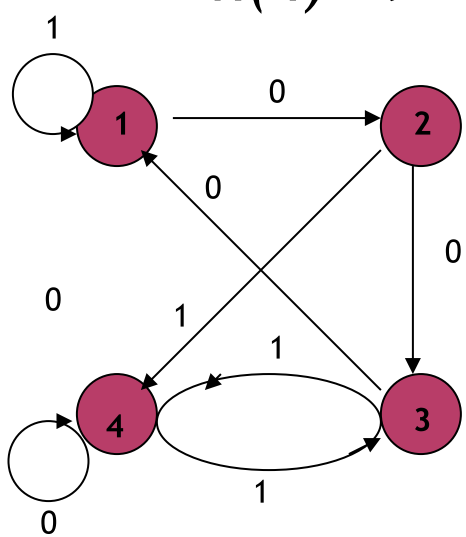
Triedy automatov s usmerňujúcimi slovami dĺžky $O(k^2)$

$(k - 1)^2$

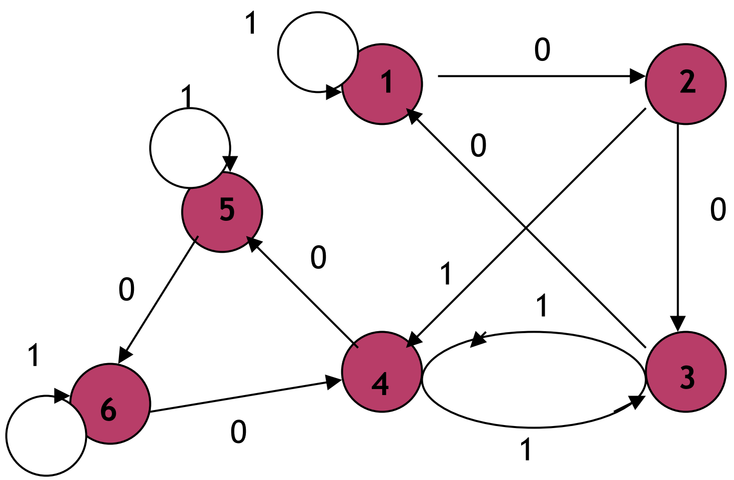
$k^2 - 3k + 4$, $k^2 - 3k + 3$, $k^2 - 3k + 2$,

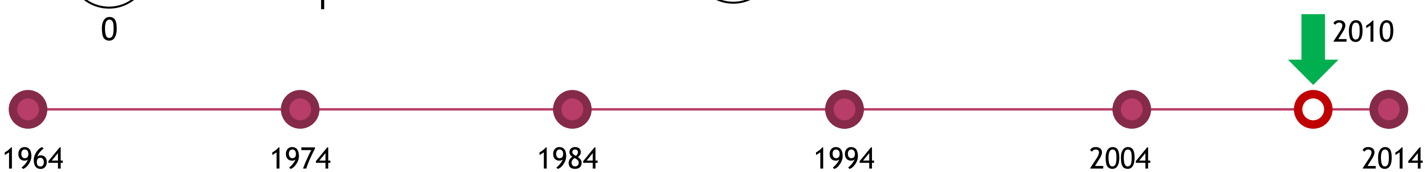
$k^2 - 4k + 7$, $k^2 - 4k + 6$.

$n(4) = 9$

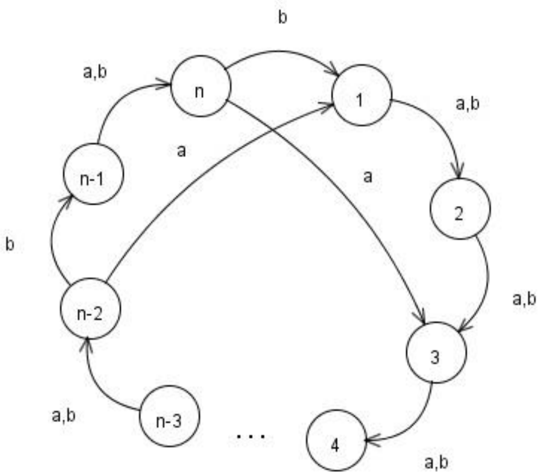


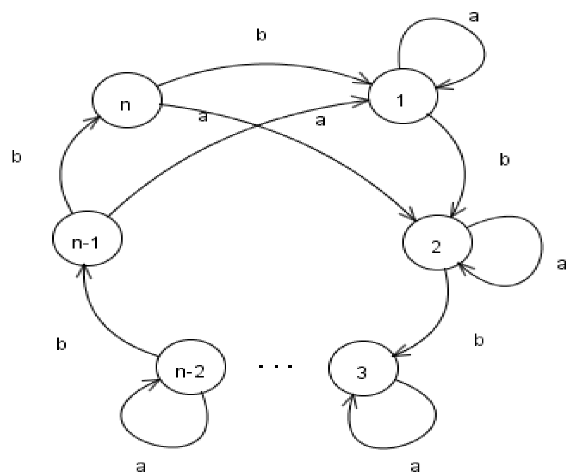
$n(6) = 25$

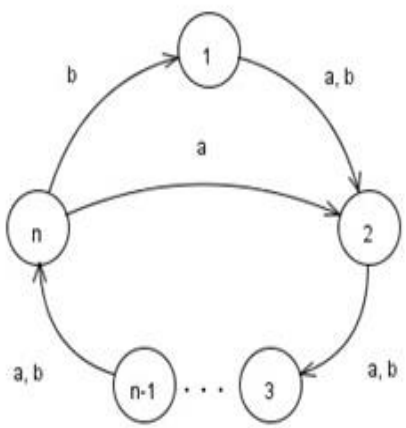


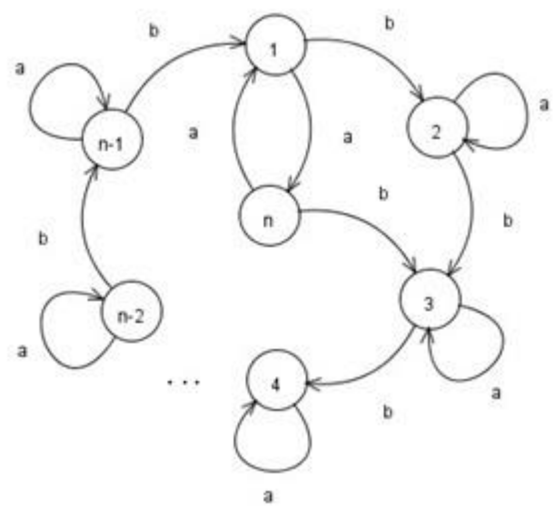


POMALY USMERNITELNÉ AUTOMATY

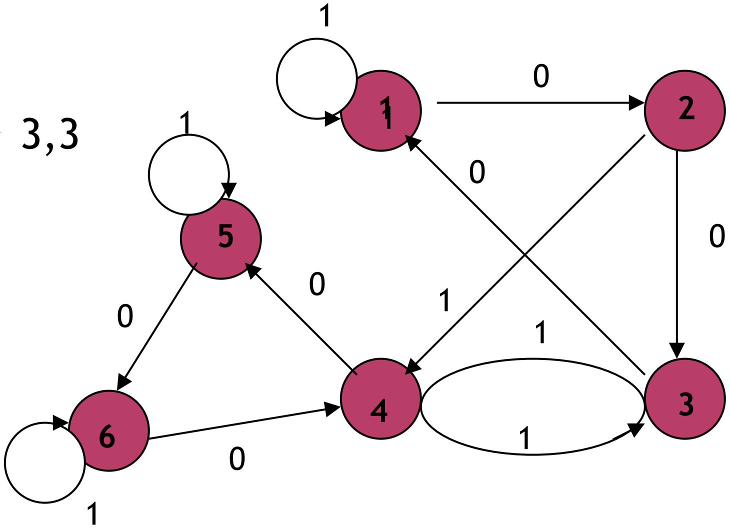




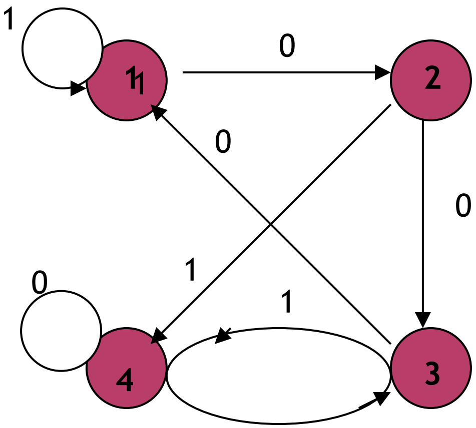




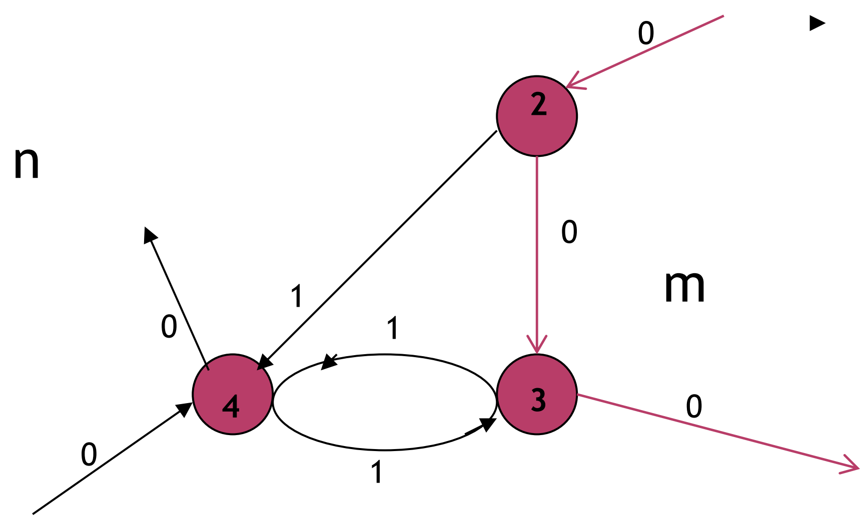
$K_{3,3}$



$K_{3,1}$



$K_{m,n}$

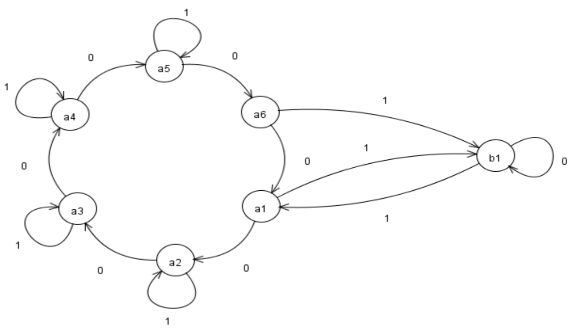


$K_{m,n}$ AUTOMATY

KELEMENOVÁ, A. Synchronizing Automata: Reset String and State Complexity. Maďarsko: Proc. 13th IEEE Int. Symp. on Comp. Int. and Inf., 2012, s. 391-394

Petr Rucký: Usměrnitelné konečné automaty 2013
Bakalárska práca

$K_{m.1}$ $m \leq 20$ končia na $10^{m-1}1$



DUÁLNY PROBLÉM

k stavové automaty

n(k) dĺžka najkratšieho usmerňujúceho slova

k	2	3	4	5	6	
n(k)	1	4	9	16	25	

Slová dĺžky *t*

usmernitelný automat s minimálnym počtom stavov

a najkratším usmerňujúcim slovom dĺžky *t*

DUÁLNY PROBLÉM

t	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
q(t)	3	3	3	4	4	4	4	4	5	5	5	5	5	5
t	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
q(t)	5	6	6	6	6	6	6	6	7	6	7	7	9	10

Jozef Jirásek: Some Calculations Related to Cerny Conjecture

USMERNITLNÉ NEDETERMINISTICKÉ AUTOMATY

Szegedská škola

Imreh, Magnus Steinby, Tatiana Petkovič,

Masami Ito

VIACHODNOTOVÉ LOGIKY

- A. Salomaa, A. Mateescu, 1999 – 2012
  6 publikácií
- viachodnotové pravdivostné funkcie, Černého hypotéza a farbenie ciest
- Kompozícia funkcií n premenných nadobúdajúcich n hodnôt
- Kedy takáto kompozícia určuje konštantu.

FARBENIE CIEST

- V teórii grafov s naším problémom súvisí veta o farbení ciest.
- Pre aperiodický graf s uniformným výstupným stupňom, existuje také zafarbenie hrán, že určitá postupnosť farieb privedie do rovnakého vrcholu nezávisle na tom, z ktorého vrcholu vychádzame.
- Ako hypotézu to roku 1970 sformulovali Roy Adler a Benjamin Weis. Vetu roku 2009 dokázal Avrham Trahtman.

Prof. RNDr. Jan Černý, DrSc, D.h.c.
Vysoká škola ekonomická v Praze,
Fakulta managementu v Jindřichově Hradci
profesor managementu komunikačních systémů

Obor zájmu:

- Manažerské rozhodování o dopravní nabídce.
- Diskrétní optimalizační problémy

Projekt GAČR **P402/12/2147** Ekonomicky optimální procesy na sítích

A. Černá, J. Černý: Position Identification of Moving Agents in Networks, *Acta Polytechnica Hungarica*, Vol. 7, No. 2, (2010) pp. 5-23

2014 - 2015

- Černýs conjecture and Optimization problems. (2014) L. Ciencialová, A. Kelemenová (eds.) Institute of computer Science Silesian University Opava
- Jirásek, J. (2014) Some computations related to Černýs conjecture. 18-23
- Vorel, V. (2014) Subset synchronizability in Eulerian Automata is NP hard.

ĎAKUJEM ZA POZORNOSŤ

1964 1974 1984 1994 2004 2014